

تابع: الفصل الأول  
كلية العلوم - الفرقة الأولى شعبة الجيولوجيا  
التكامل الغير محدود  
محاضرات في طرق التكامل

التكامل بالتجزئ

يعتبر التكامل بالتجزئ من التكاملات كثيرة الاستخدام فجال التكاملات الغير محدودة ويمكن كتابة قاعدة مشتقة حاصل الضرب كما يلي :

$$D[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

هذا يعنى أن  $f(x)g(x)$  هو معكوس تفاضلى للطرف الأيمن

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx \quad (1)$$

هذا وبإعادة ترتيبه يصبح :

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

إذا وضعنا  $u = f(x)$ ,  $v = g(x)$  فإن

$$du = f'(x)dx, \quad dv = g'(x)dx$$

والصيغة رقم (1) يمكن كتابتها بإيجاز هكذا

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (2)$$

وعليه نجد الصيغة (1) أو الصيغة (2) المكافئة لها والتي تكون صحيحة لجميع

$f(x)$ ,  $g(x)$  اللتين لها مشتقتين متصلتين ، هى الأساس لطريقة التكامل

بالتجزئ .

الأمثلة الآتية توضح كيفية استخدام التكامل بالتجزئ :

**\*\* مثال (١)**

أوجد قيمة التكامل :  $\int x \cos x dx$

**\*\* الحل**

باستخدام التكامل بالتجزئ نجد أن

$$u = x, \quad dv = \cos x dx$$

$$du = dx, \quad v = \sin x$$

من العلاقة (٢) نجد أن

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

ويمكن التأكد من ذلك بإجراء التفاضل مرة أخرى.

**\*\* مثال (٢)**

أوجد قيمة التكامل :  $\int x^2 e^x dx$

**\*\* الحل**

من المعتاد عند إجراء التكامل بالتجزئ من العلاقة (٢) نجد أن

$$u = x^2, \quad dv = e^x dx$$

$$du = 2x dx, \quad v = e^x$$

بالتعويض في قانون التكامل بالتجزئ نجد أن

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \quad (*)$$

التكامل (١) يمكن تطبيق التكامل بالتجزئ عليه مرة أخرى ومن ذلك نجد أن

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

بالتعويض في المعادلة (\*) نجد أن

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c = (x^2 - 2x + 2) e^x + c$$

عند إجراء التكامل بالتجزئ توجد طرق كثيرة لاختيار  $dv$ ,  $u$ , ومثلاً لنرى ذلك على

المثال السابق

$$(1) u = x, \quad dv = xe^x dx$$

$$(2) u = 1, \quad dv = x^2 e^x dx$$

$$(3) u = xe^x, \quad dv = x dx$$

$$(4) u = e^x, \quad dv = x^2 dx$$

لكل من هذه الاختيارات نجد

$$udv = x^2 e^x dx$$

لكن ليست جميعها اختيارات تعطي عمليات تكاملية يسهل إيجادها فمثلاً عند اختيار الاختيار رقم (٢) يصعب إيجاد الدالة  $v$  مثل الاختيار رقم (٣) الذي يمكن إيجاد الدالة  $v$  فيه بسهولة فمثلاً عند إيجاد التكامل في الاختيار رقم (٤) نجد

$$u = e^x, \quad dv = x^2 dx$$

$$du = e^x dx, \quad v = \frac{1}{3}x^3$$

وعليه يكون التكامل :

$$\int x^2 e^x dx = \frac{1}{3}x^3 e^x - \frac{1}{3} \int x^3 e^x dx$$

وبالرغم من أن هذا صحيح ولكن التكامل الأخير يبدو وكأنه أصعب من التكامل الأصلي وعليه يجب أن نعاود الاختيار مرة أخرى .

**\*\* مثال (٣)**

$$\int \tan^{-1} x dx \quad \text{أوجد قيمة التكامل :}$$

**\*\* الحل**

سنحاول إجراء التكامل بالتجزئ باختيار مناسب لـ  $dv$  ,  $u$  كما يلي :

$$u = \tan^{-1} x, \quad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x$$

وبالتالي يكون

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

\*\* مثال (٤)

$$\int e^x \sin x dx \quad : \text{أوجد قيمة التكامل}$$

\*\* الحل

يمكننا إجراء التكامل بالتجزئ باختيار مناسب لـ  $dv$ ,  $u$  كما يلي :

$$\begin{aligned} u &= \sin x, & dv &= e^x dx \\ du &= \cos x dx, & v &= e^x \end{aligned}$$

وبالتالى يكون

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

التكامل الناتج يجعلنا نتخيل أنه ليس نتيجة طبيعية للتكامل المطلوب لوجود التكامل الثانى والذى نجرى عليه التكامل بالتجزئ كما سبق ويكون

$$\begin{aligned} u' &= \cos x, & dv' &= e^x dx \\ du' &= -\sin x dx, & v' &= e^x \end{aligned}$$

وبالتالى يكون

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

وعليه نجد أن التكامل الأخير هو نفسه التكامل الأسمى وعليه نجد أن

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx) \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx \\ 2 \int e^x \sin x dx &= e^x (\sin x - \cos x) \\ \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c \end{aligned}$$

لقد أجرينا التكامل مرتين لإيجاد  $v$  مرة وأيضا  $v'$  مرة أخرى .

## \*\* التكاملات المثلثية

هناك بعض الدوال المراد تكاملها تبدو من أول وهلة أنها صعبة ولذلك عند تحويلها إلى دوال أخرى يسهل تكاملها باستخدام تعويضات معينة والتي سوف نذكر منها التحويلات المثلثية وسوف ندرس بعض الوسائل التي يمكن إيجادها في البداية نقدم بعض المتطابقات المثلثية الهامة والمستخدممة في هذه التعويضات والتي تساعدنا كثيرا في التكاملات كما يلي :

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 & \tan^2 x + 1 &= \sec^2 x & \tan^2 x &= \sec^2 x - 1 \\ \cot^2 x + 1 &= \operatorname{cosec}^2 x & \cot^2 x &= \operatorname{cosec}^2 x - 1\end{aligned}$$

بالإضافة إلى ذلك نتذكر تفاضلات الدوال المثلثية .

\*\* مثال (1)

$$\int \sec^4 2x \tan 2x dx \quad \text{أوجد قيمة التكامل :}$$

\*\* الحل

يمكننا إجراء التكامل كما يلي ، حيث أن  $\sec 2x \tan 2x$  هي مشتقة  $\frac{1}{2} \sec 2x$  وعليه

نكتب التكامل في الصورة التالية

$$I = \int \sec^4 2x \tan 2x dx = \int \sec^3 2x (\sec 2x \tan 2x) dx$$

ويمكن استخدام القانون التالي :

$$\int g^n(x) g(x) dx = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

فحصل على :

$$I = \frac{1}{2} \int \sec^3 2x (2 \sec 2x \tan 2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (\sec 2x)^4 + c = \frac{1}{8} (\sec 2x)^4 + c$$

**\*\* مثال (٢)**

أوجد قيمة التكامل :  $\int \tan^3 x dx$

**\*\* الحل**

يمكننا إجراء التكامل كما يلي

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x dx &= \int \tan^2 x \tan x dx = \int (\sec^2 x - 1) \tan x dx \\ &= \int \sec^2 x \tan x dx - \int \tan x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + c\end{aligned}$$

( سوف نتعرض لمثل هذه التكاملات بطريقة أخرى وأكثر تعميماً فى التكامل

بالاختزال المتتالى ) .

بعض المتطابقات المثلثية الهامة

$$** \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$** \sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$** \cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

$$** \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$** \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - \sin^2 x$$

$$** \cos^2 2x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$** \sin^2 2x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$** \sin 2x = 2\sin x \cos x .$$

**\*\* مثال (٣)**

أوجد قيمة التكامل :  $\int \cos 2x \cos 5x dx$

**\*\* الحل**

يمكننا إجراء التكامل باستخدام التطبيقات السابقة كما يلي

$$\int \cos 2x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 7x + \cos 3x) dx = \frac{1}{14} \sin 7x + \frac{1}{6} \cos 3x + c$$

وهكذا يمكن استخدام الصيغ الأخرى لإيجاد حواصل الضرب .

**\*\* تكاملات تشتمل على  $\sqrt{x^2 + a^2}$ ,  $\sqrt{a^2 \pm x^2}$**

كثيرا ما يحدث وتشتمل بعض التكاملات على مثل هذه الجذور مثل بعض الحالات في الصورة البسيطة الآتية :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

ويكون أحيانا الغرض من مثل هذه التكاملات هو ظهورها في صورتها الأكثر صعوبة والتي تشتمل على هذه الجذور وذلك بإجراء التغيير للمتغير مثل

$$x = a \sin x, \quad x = a \sec x, \quad x = a \tan x$$

ويمكن باختيار التغيير اللازم والمرتبب بإحدى المتطابقات الآتية بالترتيب :

$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

وسوف نوضح ذلك بالأمثلة الآتية :

**\*\* مثال**

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx; \quad a > 0 \quad \text{أوجد قيمة التكامل :}$$

**\*\* الحل**

يمكننا إجراء التكامل باستخدام التعويضات السابقة كما يلي

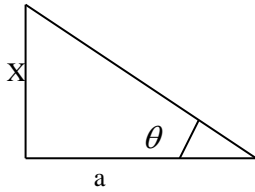
$$\text{بوضع } x = a \sin \theta \text{ حيث } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = a\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = a \cos \theta$$

فان التكامل يصبح على الصورة

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{a \cos \theta}{a^2 \sin^2 \theta} a \cos \theta d\theta = \int \cot^2 \theta d\theta = \int (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) d\theta \\ &= \int \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta - \int d\theta = \cot \theta - \theta + c \end{aligned}$$

بما أن  $x = a \sin \theta$  فانه يمكن رسم مثلث فيه  $\sin \theta = \frac{x}{a}$  حيث



### تكامل الدوال الكسرية (باستخدام الكسور الجزئية)

نعرف أن الدوال الكسرية هي دوال خارج قسمة على الصورة  $\frac{f(x)}{g(x)}$  لكثيرتي حدود

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{5x^3 - 4x^2 + x - 2} \quad \text{معاملتها حقيقية مثلاً :}$$

سوف ندرس الآن كيف نوجد تكامل الدوال الكسرية

درسنا في الجبر موضوع من إحدى الموضوعات الهامة والتي تستخدم كيفية تحليل المقدار الكسرى إلى كسوره الجزئية أو توحيد المقامات لتصبح كسراً واحداً فمثلاً أحياناً يكون لدينا المقدار الآتى :

$$\frac{3}{x-1} + \frac{5}{x-4} = \frac{3(x-4) + 5(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}$$

وأحياناً أخرى يكون لدينا

$$\frac{8x-17}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} = \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x-4}$$



وذلك باستخدام طرق تحليل الكسور الجزئية المعروفة لإيجاد قيم A, B المعروفة .  
لكي نعمم ذلك يجب أن نعمم هذه الطريقة بأن نعبر عن الكسر كحاصل جمع كسور  
في صورة مبسطة لكي يسهل تكاملها بحيث ينطبق عليها شرطان هما :

الشرط الأول : هو أن الكسر يجب أن يكون فيه درجة البسط أقل من درجة المقام  
لكي يكون الكسر حقيقي .  
الشرط الثاني : هو أن يحلل الكسر إلى عوامل خطية من الدرجة الأولى أو الدرجة  
الثانية ولا يمكن تحليلها ومعاملتها حقيقية.

**\*\* مثال (1)**

$$\int \frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x} dx \quad \text{أوجد قيمة التكامل}$$

**\*\* الحل**

من الملاحظ أن الدالة المكاملة هي دالة كسرية والكسر حقيقي ويمكن تحلية إلى  
عوامل خطية كما يلي :

$$\frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

ولإيجاد قيم الثوابت المختلفة A, B, C, D نقوم بجمع الكسور كما يلي :

$$\frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x(x-2)(x^2+1)} = \frac{A(x-2)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x-2)}{x(x-2)(x^2+1)}$$

وعليه يكون

$$6x^3 - 11x^2 + 5x - 4 = A(x-2)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x-2)$$

بوضع x=0

$$-4 = -2A, \quad A=2$$

بوضع x=2

$$48-44+10-4=2B \quad (5), \quad B=1$$

بوضع  $x=1$

$$6-11+5-4=A(-1)(2)+2B+(C+D)(-1), \quad C+D=2 \quad (*)$$

بوضع  $x=-1$

$$-6-11-5-4=A(-3)(2)+B(-1)(2)+(-C+D)(-1)(-3), \quad C-D=4 \quad (**)$$

بجمع العلاقتين  $(*)$  ،  $(**)$  ينتج أن

$$C=3, \quad D=-1$$

وعليه التكامل يصبح على الصورة :

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x(x-2)(x^2+1)} dx &= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{(x-2)} dx + \int \frac{3x-1}{(x^2+1)} dx \\ &= 2\ln|x| + \ln|x-2| + 3 \int \frac{xdx}{(x^2+1)} - \int \frac{dx}{(x^2+1)} \\ &= 2\ln|x| + \ln|x-2| + \frac{3}{2} \ln|x^2+1| - \tan^{-1} x + c \\ &= \ln|x^2(x-2)(x^2+1)^{3/2}| - \tan^{-1} x + c \end{aligned}$$

**\*\* مثال (٢)**

$$\int \frac{9x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx \quad \text{أوجد قيمة التكامل}$$

**\*\* الحل**

من الواضح هنا أن درجة لبسط أكبر من درجة المقام أي أن الكسر غير حقيقي لتحويله إلى كسر حقيقي نجرى عملية القسمة كما يلي :

$$\begin{aligned} \frac{9x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} &= x + 4 + \frac{22x - 5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} \\ \int \frac{9x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx &= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{22x - 5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx \quad (*) \end{aligned}$$

التكامل الأخير يتحلل إلى

$$9x^3 + 12x^2 - 11x + 2 = (x+2)(3x-1)^2$$

لاحظ أن المقدار  $(3x-1)$  عامل من الدرجة الأولى المكررة  
وعليه فإن الدالة الكاملة في التكامل الأخير يمكن التعبير عنها كحاصل جمع كسور  
جزئية على الصورة :

$$\frac{22x-5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(3x-1)} + \frac{C}{(3x-1)^2}$$

ثم نحاول إيجاد الثوابت A, B, C كما يلي :

$$22x - 5 = A(3x-1)^2 + B(3x-1)(x+2) + C(x+2)$$

ثم بالتعويض عن قيم  $x = \frac{1}{3}$ ,  $x = -2$ ,  $x = 0$  نحصل على

$$-5 = A - 2B + 2C \quad (**)$$

$$44 - 5 = A(49) \quad A = -1$$

$$\frac{22}{3} - 5 = C\left(\frac{1}{3} + 2\right), \quad \frac{7}{3} = \frac{7}{3}C, \quad C = 1$$

بالتعويض في العلاقة (\*\*\*) نحصل على

$$2B = -1 + 5 + 2 = 6,$$

$$B = 3$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \int \frac{22x-5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx &= \int \frac{-1}{x+2} dx + \int \frac{3}{3x-1} dx + \int \frac{3}{(3x-1)^2} dx \\ &= \ln|x+2| + \ln|3x-1| - \frac{1}{3} \ln(3x-1)^{-1} + c = \ln \left| \frac{3x-1}{x+2} \right| - \frac{1}{3(3x-1)} + c \end{aligned}$$

بالتعويض في العلاقة (\*) نجد أن

$$\int \frac{9x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{3x-1}{x+2} \right| - \frac{1}{3(3x-1)} + c$$

## تمارين

(١) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int \frac{x^2+a}{x^3} dx; \int \frac{dx}{x^2-2x+8}; \int \frac{3x-4}{x-4} dx; \int \frac{dx}{x^2-8x+15};$$

$$\int \sin^{-1} 3y dy; \int (3x+x^2) \cos x dx; \int \sin^7 \frac{x}{2} dx; \int \frac{dx}{x(x+4)};$$

$$\int \frac{1+x^2}{x^2-4x+3} dx; \int \frac{dx}{x(x+1)^2} \int \frac{y^5+3y^4+2y^3-y^2+4}{y^3+y^2+2y} dy;$$

$$\int \frac{dx}{2x^2+9}; \int \frac{dx}{x^2-6x+9}; \int x \sec^{-1} x dx$$

(٢) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}} dx; \int \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}};$$

$$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{x^2-1}}; \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x-3}};$$

$$\int \frac{udu}{u^2+u+1}; \int \frac{tdt}{(2t-1)^2};$$

$$\int \frac{v dv}{v^2-3v+2}; \int \frac{x^4 dx}{(x^3-3)^3}; \int \frac{y^5+1}{y^6+y^4} dy.$$

## أمثلة متنوعة (محلولة)

\*\* مثال (١)

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x}$$

أوجد قيمة التكامل

\*\* الحل

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 - \cos x)dx}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} &= \int \frac{(1 - \cos x)dx}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{(1 - \cos x)dx}{\sin^2 x} \\ &= \int (\sec^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x) dx = -\cot x + \operatorname{cosec} x + c \end{aligned}$$

\*\* مثال (٢)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1) \int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(2) \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 30}$$

$$(3) \int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 8} dx$$

$$(4) \int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}} dx$$

\*\* الحل

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\sqrt{1-x^2} + 3\sin^{-1} x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 30} &= \int \frac{dx}{(x+5)^2 + 5} = \int \frac{dx}{(x+5)^2 + (\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{5})^2} \tan^{-1} \left( \frac{x+5}{\sqrt{5}} \right) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 8} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-4) + 6}{x^2 - 4x + 8} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-4)}{x^2 - 4x + 8} dx + 3 \int \frac{1}{x^2 - 4x + 8} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) + 3 \int \frac{1}{(x-2)^2 + 4} dx \end{aligned}$$

$$= \ln\sqrt{(x^2 - 4x + 8)} + \frac{3}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + c$$

$$(4) \int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-4}{\sqrt{4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(-2x+4)-8}{\sqrt{4x-x^2}} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}} dx + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 4 \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + c$$

\*\* مثال (٣)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1) \int \frac{(2-x)dx}{4x^2+4x-3}$$

$$(2) \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx$$

$$(3) \int \sqrt{3-2x-x^2} dx$$

\*\* الحل

$$(1) \int \frac{(2-x)dx}{4x^2+4x-3} = -\frac{1}{8} \int \frac{8x+4}{4x^2+4x-3} dx + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{(2x+1)^2-4}$$

$$= -\frac{1}{8} \ln|4x^2+4x-3| + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+3} \right| + c$$

$$(2) \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-4}} dx$$

$$= \int \sqrt{x^2+2x-3} + 2 \ln |(x+1) + \sqrt{(x+1)^2-4}| + c$$

$$(3) \int \sqrt{3-2x-x^2} dx$$

لإجراء هذا التكامل نتبع الآتى : نضع

$$x+1 = 2\sin\theta, \quad dx = 2\cos\theta d\theta$$

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2} dx$$

$$= 4 \int \cos^2 \theta d\theta = 2 \int (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= 2\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + c,$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{x+1}{2}$$

وباستخدام قوانين حساب المثلثات نجد أن :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3-2x-x^2} dx &= 2\theta + \sin 2\theta + c = 2\theta + 2\sin\theta \cos\theta + c \\ &= 2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \left(\frac{x+1}{2}\right)\sqrt{3-2x-x^2} + c \\ \cos\theta &= \sqrt{3-2x-x^2} + c\end{aligned}$$

حيث

**\*\* مثال (٤)**

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

(1)  $\int \sec^3 x dx$

(2)  $\int \operatorname{cosec}^3 x dx$

**\*\* الحل**

هذه التكاملات تكتب في الصورة

$$\begin{aligned}(1) \int \sec^3 x dx &= \int \sec x \sec^2 x dx = \int \sec x d \tan x \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx\end{aligned}$$

وذلك باستخدام التكامل بالتجزئ وعليه نجد أن

$$u = \sec x, \quad \Rightarrow \quad du = \sec x \tan x dx$$

$$dv = d \tan x, \quad \Rightarrow \quad v = \tan x$$

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx\end{aligned}$$

$$2 \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + c$$

وعليه يكون

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + c$$

وكذلك بنفس الطريقة يمكن إجراء التكامل التالي

$$\int \operatorname{cosec}^3 x dx = \int \operatorname{cosec} x \operatorname{cosec}^2 x dx$$

\*\* مثال (٥)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1) \int \sin 3x \sin 2x dx$$

$$(2) \int \sin 3x \sin 5x dx$$

$$(3) \int \cos 4x \cos 2x dx$$

\*\* الحل

$$\begin{aligned} (1) \int \sin 3x \sin 2x dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(3x - 2x) - \cos(3x + 2x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int [\cos x - \cos 5x] dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + c \end{aligned}$$

والمثل يمكن حساب التكامل بالنسبة للتكاملات الأخرى باستخدام القوانين المختلفة لحساب المتثلثات .

\*\* مثال (٦)

أوجد قيمة التكامل الآتي :

$$\int \cot^3 x \operatorname{cosec}^5 x dx$$

\*\* الحل

$$\begin{aligned} \int \cot^3 x \operatorname{cosec}^5 x dx &= \int \cot^2 x \operatorname{cosec}^4 x \cot x \operatorname{cosec} x dx \\ &= \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \operatorname{cosec}^4 x \cot x \operatorname{cosec} x dx \\ &= \int (\operatorname{cosec}^6 x - \operatorname{cosec}^4 x) \cot x \operatorname{cosec} x dx \\ &= -\frac{1}{7} \operatorname{cosec}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{cosec}^5 x + c \end{aligned}$$

\*\* مثال (٧)

أوجد قيمة التكامل الآتي :

$$\int \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}}$$

\*\* الحل

باستخدام إكمال المربع داخل الجذر بالمقام نجد أن

$$\int \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}} = \int \frac{dx}{(4(x-3)^2 - 9)^{3/2}}$$



وباستخدام التعويض نحصل على

$$x-3 = \frac{3}{2} \sec z, \quad dx = \frac{3}{2} \sec z \tan z dz$$

$$\int \frac{dx}{(4(x-3)^2 - 9)^{3/2}} = \int \frac{\frac{3}{2} \sec z \tan z}{27 \tan^3 z} dz = -\frac{1}{18} \operatorname{cosec} z + c$$

وباستخدام المثلثات والتعويض نجد أن :

$$\int \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}} = -\frac{1}{9} \frac{x-3}{\sqrt{4x^2 - 24x + 27}} + c$$

\*\* مثال (٨)

$$\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x - 1} dx \quad \text{أوجد قيمة التكامل الآتي :}$$

\*\* الحل

بتحويل الدالة القياسية إلى كسورها الجزئية نجد أن

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x - 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + c = \frac{-4}{x-1} + \frac{1}{2} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + c \end{aligned}$$

\*\* مثال (٩)

$$\int \frac{3x+5}{(x-2)\sqrt{x+2}} dx \quad \text{أوجد قيمة التكامل الآتي :}$$

\*\* الحل

نضع

$$x+2 = z^2, \quad dx = 2z dz, \quad x = z^2 - 2$$

$$\int \frac{3x+5}{(x-2)\sqrt{x+2}} dx = \int \frac{2z}{z(z^2-4)} dz = 2 \int \frac{dz}{z^2-4}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-2}{z+2} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2} \right| + c$$

\*\* مثال (١٠)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}} \quad \text{أوجد قيمة التكامل الآتي :}$$

\*\* الحل

نضع

$$x^2 + x + 2 = (z - x)^2$$

$$x = \frac{z^2 - z}{1 + 2z}, \quad dx = \frac{2(z^2 + z + 2)dz}{(1 + 2z)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + x + 2} = \frac{z^2 + z + 2}{1 + 2z}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}} &= \int \frac{dz}{z^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} \right| + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+x+2} + x - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2} + x + \sqrt{2}} \right| + c \end{aligned}$$

\*\* مثال (١١)

$$\int x^5 \sqrt{1-x^3} dx \quad \text{أوجد قيمة التكامل الآتي :}$$

\*\* الحل

باستخدام التعويض  $1-x^3 = z^2$  نحصل على

$$\begin{aligned} \int x^5 \sqrt{1-x^3} dx &= \int (1-z^2)z \left(-\frac{2}{3}z dz\right) = -\frac{2}{3} \int (1-z^2)z^2 dz \\ &= -\frac{2}{3} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5}\right) + c = -\frac{2}{45} (1-x^3)^{3/2} (2+3x^3) + c \end{aligned}$$

\*\* مثال (١٢)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1) \int x\sqrt{1+x^2} dx$$

$$(2) \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}} dx$$

$$(3) \int \tan^3 x \sec^2 x dx$$

$$(4) \int \sinh^5 x \cosh x dx$$

$$(5) \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx$$

$$(6) \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$$

$$(7) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$(8) \int \frac{dx}{x(1+\log x)}$$

\*\* الحل

سوف نكتب  $df(x) = f'(x)dx$  فنحصل على

$$(1) \int x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) \\ = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^3 + c$$

$$(2) \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}} dx = \frac{1}{3} \int (x^3+3x+1)^{-1/2} d(x^3+3x+1) \\ = \frac{1}{3} \sqrt{x^3+3x+1} + c$$

ملحوظة

إذا كان البسط تفاضل الدالة ما بداخل الجذر فى المقام فان نتيجة التكامل هى

ضعف الجذر

$$\int \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + c$$

$$(3) \int \tan^3 x \sec^2 x dx = \int \tan^3 x d \tan x = \frac{\tan^4 x}{4} + c$$

$$(4) \int \sinh^5 x \cosh x dx = \int \sinh^5 x d \sinh x = \frac{\sinh^6 x}{6} + c$$

$$(5) \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)}{x^2+2x+5} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} = \log \sqrt{x^2+2x+5} + c$$

$$(6) \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = \int \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x} = -\log(1+\cos x) + c$$

$$(7) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = \log(1+e^x) + c$$

$$(8) \int \frac{dx}{x(10+\log x)} = \int \frac{dx/x}{(1+\log x)} = \int \frac{d(1+\log x)}{(1+\log x)} = \log(1+\log x) + c$$

\*\* مثال (١٣)

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx$$

أوجد قيمة التكامل الآتي :

\*\* الحل

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x (1-\sin^2 x)^2 d \sin x$$

$$= \int \sin^4 x (1-2\sin^2 x + \sin^4 x) d \sin x = \int (\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x) d \sin x$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + c$$

## التكامل باستخدام التحويل

نفرض انه يراد  $\int f(x)dx$  ، نضع  $x = g(t)$  فيكون

$$f(x)dx = f(g(t))dg(t)$$

فإذا أمكن حساب قيمة التكامل في الطرف الأيسر فان قيمته تكون هي قيمة التكامل في الطرف الأيمن ومن اشهر صيغ التعويض هي :

أولاً : التعويض بالدوال المثلثية أو الزائدية لإزالة الجذور التربيعية وفيما يلي الصيغ المناسبة لكل حالة :

(١) في التكاملات التي تحتوى  $\sqrt{a^2 - x^2}$  ضع

$$x = a \sin u; \quad x = a \tanh u$$

ويفضل استخدام التعويض الأول إذا وجد الجذر في البسط والتعويض الثانى إذا وجد الجذر فى المقام .

(٢) فى التكاملات التى تحتوى  $\sqrt{a^2 + x^2}$  ضع

$$x = a \tan u; \quad x = a \sinh u$$

ويفضل استخدام التعويض الأول إذا وجد الجذر فى المقام والتعويض الثانى إذا وجد الجذر فى البسط .

(٣) فى التكاملات التى تحتوى  $\sqrt{x^2 - a^2}$  ضع

$$x = a \sec u; \quad x = a \cosh u$$

ويفضل استخدام التعويض الأول إذا وجد الجذر فى المقام والتعويض الثانى إذا وجد الجذر فى البسط .

(٤) إذا كان تحت الجذر عامل من الدرجة الثانية فانه يلزم أولاً تحويله إلى مربع كامل فتحول إلى إحدى الصور الثلاثة السابقة وبعد ذلك نستخدم التعويض المناسب .

\*\* مثال (١)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1) \int (1-x^2)^{1/2} dx$$

$$(2) \int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2} dx$$

$$(3) \int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$$

\*\* الحل

$$(1) \int (1-x^2)^{1/2} dx$$

نضع

$$x = \sin\theta; \quad dx = \cos\theta d\theta$$

$$\int (1-x^2)^{1/2} dx = \int (\cos^2\theta)^{1/2} \cos\theta d\theta = \int \cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + c = \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{2\sin\theta \cos\theta}{2} \right) + c$$

$$= \frac{1}{2} (\sin^{-1} x + x\sqrt{1-x^2}) + c$$

$$(2) \int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2} dx$$

نضع

$$x = 3\sinh u; \quad du = 3\cosh u du$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2} dx = \int \frac{(9\cosh^2 u)^{1/2} 3\cosh u du}{9\sinh^2 u} = \int \coth^2 u du$$

$$= \int (1 + \operatorname{cosech}^2 u) du = u - \operatorname{coth} u + c = \sinh^{-1} \frac{x}{3} - \frac{\cosh u}{\sinh u} + c$$

$$= (\sinh^{-1} \frac{x}{3} - \frac{\sqrt{1 + \frac{x^2}{9}}}{\frac{x}{3}}) + c = (\sinh^{-1} \frac{x}{3} - \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x}) + c$$

$$(3) \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$$

نضع

$$\begin{aligned} x &= \sec\theta; & dx &= \sec\theta \tan\theta d\theta \\ \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}} &= \int \frac{\sec\theta \tan\theta}{(\tan^2\theta)^{3/2}} d\theta = \int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} d\theta \\ &= \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta = \int \frac{d(\sin\theta)}{\sin^2\theta} = \int \frac{-1}{\sin\theta} + c \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2\theta}} + c = \frac{-1}{\cos\theta \sqrt{\sec^2\theta - 1}} + c \\ &= \frac{-\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}} + c = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} + c \end{aligned}$$

\*\* مثال (٢)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1) \int \sqrt{21 - 4x - x^2} dx$$

$$(2) \int \sqrt{x^2 + 2x + 10} dx$$

$$(3) \int \sqrt{x^2 + 6x + 5} dx$$

\*\* الحل

$$\begin{aligned} (1) \int \sqrt{21 - 4x - x^2} dx &= \int \sqrt{21 - (x^2 + 4x)} dx \\ &= \int \sqrt{21 - (x+2)^2 - 4} dx = \int \sqrt{25 - (x+2)^2} d(x+2) \end{aligned}$$

نستخدم التعويض بوضع

$$\begin{aligned} (x+2) &= 5\sin\theta, & dx &= 5\cos\theta d\theta \\ 25 - (x+2)^2 &= 25 - 25\sin^2\theta = 25(1 - \sin^2\theta) = 25\cos^2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{21-4x-x^2} dx &= \int \sqrt{25\cos^2\theta} \cdot 5\cos\theta d\theta = \int 25\cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{25}{2} \int (1+\cos 2\theta) d\theta = \frac{25}{2} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + c \\
&= \frac{25}{2} \left( \theta + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2} \right) + c \\
&= \frac{25}{2} \left\{ \sin^{-1} \frac{x+2}{5} + \frac{x+2}{5} \sqrt{1-\left(\frac{x+2}{5}\right)^2} \right\} + c \\
&= \frac{25}{2} \left\{ \sin^{-1} \frac{x+2}{5} + \frac{x+2}{5} \sqrt{25-(x+2)^2} \right\} + c \\
&= \frac{25}{2} \left\{ \sin^{-1} \frac{x+2}{5} + \frac{x+2}{5} \sqrt{21-4x-x^2} \right\} + c
\end{aligned}$$

$$(2) \int \sqrt{x^2+2x+10} dx = \int \sqrt{(x+1)^2+9} dx$$

نستخدم التعويض بوضع

$$(x+1) = 3\sinh\theta, \quad dx = 3\cosh\theta d\theta$$

$$(x+1)^2+9 = 9\sinh^2\theta+9 = 9\cosh^2\theta$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{21-4x-x^2} dx &= \int 3\cosh\theta \cdot 3\cosh\theta d\theta = \int 9\cosh^2\theta d\theta \\
&= \frac{9}{2} \int (1+\cosh 2\theta) d\theta = \frac{9}{2} \left( \theta + \frac{\sinh 2\theta}{2} \right) + c \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sinh^{-1} \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{3} \sqrt{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1} \right\} + c \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sinh^{-1} \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{3} \sqrt{x^2+2x+10} \right\} + c \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 9\sinh^{-1} \frac{x+1}{3} + (x+1)\sqrt{x^2+2x+10} \right\} + c
\end{aligned}$$



$$(3) \int \sqrt{x^2 + 6x + 5} dx = \int \sqrt{(x+3)^2 - 4} dx$$

نستخدم التعويض بوضع

$$(x+3) = 2 \cosh \theta, \quad dx = 2 \sinh \theta d\theta$$

$$(x+3)^2 - 4 = 4 \cosh^2 \theta - 4 = 4 \sinh^2 \theta$$

$$\int \sqrt{x^2 + 6x + 5} dx = 2 \int \sinh \theta \cdot 3 \cosh \theta d\theta$$

$$= 2 \int (\cosh 2\theta - 1) d\theta = 2 \left( \frac{\sinh 2\theta}{2} - \theta \right) + c$$

$$= 2(\sinh \theta \cosh \theta - \theta) + c$$

$$= 2 \left\{ \frac{x+3}{2} \sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 1} - \cosh^{-1} \frac{x+3}{2} \right\} + c$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (x+3) \sqrt{x^2 + 6x + 5} - 2 \cosh^{-1} \frac{x+3}{2} \right\} + c$$

\*\* مثال (٣)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1) \int \frac{5x}{x^2 + x - 6} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$$

\*\* الحل

$$(1) \int \frac{5x}{x^2 + x - 6} dx$$

نحول المقدار  $\frac{5x}{x^2 + x - 6}$  إلى كسور الجزئية

$$\frac{5x}{x^2 + x - 6} = \frac{5x}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}$$

$$\int \frac{5x}{x^2 + x - 6} dx = 2 \int \frac{1}{x-2} dx + 3 \int \frac{1}{x+3} dx$$

$$= 2 \log(x-2) + 3 \log(x+3) + c = \log(x-2)^2 + \log(x+3)^3 + c$$

$$(2) \int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$$

نحول المقدار  $\frac{1}{x(x-1)^2}$  إلى كسوره الجزئية

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x-1)^2} dx &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= \log x + \log(x-1) - \frac{1}{(x-1)} + c \end{aligned}$$

## تمارين

(١) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{2\cos 3x + 5}} dx;$$

$$\int \frac{\sec x}{1 + \tan x} dx;$$

$$\int \frac{1}{e^x(3 + e^{-x})} dx;$$

$$\int \frac{2 + \log x}{x} dx;$$

$$\int \frac{\log^3 x}{x} dx;$$

$$\int \frac{\sin x}{e^x} dx;$$

$$\int (\sec x e^{\tan x})^2 dx;$$

$$\int \frac{\tan x}{\log \cos x} dx$$

(٢) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int \frac{x^2 + a^2}{x^3} dx;$$

$$\int \frac{e^t + 2}{e^t} dx;$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 8} dx;$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx;$$

$$\int \frac{8x - 4}{x - 4} dx;$$

$$\int e^{\sin z} \cos z dz;$$

$$\int \sqrt{\sin z} \cos z dz;$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 8x + 15} dx$$

(٤) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int \cos^5 x dx;$$

$$\int \operatorname{cosec}^5 z \cot z dz;$$

$$\int \cos^3 x dx;$$

$$\int \cos^7 \frac{x}{2} dx$$

(٥) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx;$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-4x+3} dx;$$

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$$