تابع: الفصل الأول
كلية العلوم - الفرقة الأولى شعبة البيولوجيا
التكامل الغير محدود
محـاضرات في طـــرق التكامـل

التكامل بالتجزئ

يعتبر التكامل بالتجزئ من التكاملات كثيرة الاستخدام فجال التكاملات الغير محدودة ويمكن كتابة قاعدة مشتقة حاصل الضرب كما يلى :

$$D[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

هذا يعنى أن $f(x)g(x)$ هو معكوس تفاضلى للطرف الأيمن

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx \qquad (1)$$

هذا وبإعادة ترتيبه يصبح :

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

إذا وضعنا $v = g(x)$ ، $u = f(x),$ فإن

$$du = f'(x)dx, \qquad dv = g'(x)dx$$

والصيغة رقم (١) يمكن كتابتها بإيجاز هكذا

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (2)$$

وعليه نجد الصيغة (١) أو الصيغة (٢) المكافئة لها والتى تكون صحيحة لجميع $f(x), \quad g(x)$ اللتين لها مشتقتين متصلتين ، هى الأساس لطريقة التكامل بالتجزئ .

الأمثلة الآتية توضح كيفية استخدام التكامل بالتجزئ :

** مثال (١)

أوجد قيمة التكامل : $\int x\cos x dx$

** الحل

باستخدام التكامل بالتجزئ نجد أن

$$u = x, \qquad dv = \cos x dx$$

$$du = dx, \qquad v = \sin x$$

من العلاقة (٢) نجد أن

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c$$

ويمكن التأكد من ذلك بإجراء التفاضل مرة أخرى.

** مثال (٢)

أوجد قيمة التكامل : $\int x^2 e^x dx$

** الحل

من المعتاد عند إجراء التكامل بالتجزئ من العلاقة (٢) نجد أن

$$u = x^2, \qquad dv = e^x dx$$

$$du = 2x dx, \qquad v = e^x$$

بالتعويض فى قانون التكامل بالتجزئ نجد أن

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx \qquad (*)$$

التكامل (١) يمكن تطبيق التكامل بالتجزئ عليه مرة أخرى ومن ذلك نجد أن

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

بالتعويض فى المعادلة (*) نجد أن

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

عند إجراء التكامل بالتجزئ توجد طرق كثيرة لاختيار u, dv ومثلا لنرى ذلك على المثال السابق

$$
\begin{aligned}
&(1)\ u = x, && dv = xe^x dx\\
&(2)\ u = 1, && dv = x^2 e^x dx\\
&(3)\ u = xe^x, && dv = xdx\\
&(4)\ u = e^x, && dv = x^2 dx
\end{aligned}
$$

لكل من هذه الاختيارات نجد $udv = x^2 e^x dx$

لكن ليست جميعها اختيارات تعطى عمليات تكاملية يسهل إيجادها فمثلاً عند اختيار الاختيار رقم (٢) يصعب إيجاد الدالة v مثل الاختيار رقم (٣) الذى يمكن إيجاد الدالة v فيه بسهولة فمثلاً عند إيجاد التكامل فى الاختيار رقم (٤) نجد

$$
\begin{aligned}
&u = e^x, && dv = x^2 dx\\
&du = e^x dx, && v = \frac{1}{3}x^3
\end{aligned}
$$

وعليه يكون التكامل :

$$\int x^2 e^x dx = \frac{1}{3}x^3 e^x - \frac{1}{3}\int x^3 e^x dx$$

وبالرغم من أن هذا صحيح ولكن التكامل الأخير يبدو وكأنه أصعب من التكامل الأصلى وعليه يجب أن نعاود الاختيار مرة أخرى .

** مثال (٣)

أوجد قيمة التكامل : $\int \tan^{-1} x dx$

** الحل

سنحاول إجراء التكامل بالتجزئ باختيار مناسب لـ u, dv كما يلى :

$$
\begin{aligned}
&u = \tan^{-1} x, && dv = dx\\
&du = \frac{dx}{1+x^2}, && v = x
\end{aligned}
$$

وبالتالى يكون

$$\int \tan^{-1} x dx = x\tan^{-1} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

**** مثال (٤)**

أوجد قيمة التكامل : $\int e^x \sin x dx$

**** الحل**

يمكننا إجراء التكامل بالتجزئ باختيار مناسب لـ u, dv كما يلى :

$$u = \sin x, \qquad dv = e^x dx$$

$$du = \cos x dx, \qquad v = e^x$$

وبالتالى يكون

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

التكامل الناتج يجعلنا نتخيل أنه ليس نتيجة طبيعية للتكامل المطلوب لوجود التكامل الثانى والذى نجرى عليه التكامل بالتجزئ كما سبق ويكون

$$u' = \cos x, \qquad dv' = e^x dx$$

$$du' = -\sin x dx, \qquad v' = e^x$$

وبالتالى يكون

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

وعليه نجد أن التكامل الأخير هو نفسه التكامل الأصلى وعليه نجد أن

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx)$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx$$

$$2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + c$$

لقد أجرينا التكامل مرتين لإيجاد v مرة وأيضا v' مرة أخرى .

** التكاملات المثلثية

هناك بعض الدوال المراد تكاملها تبدو من أول وهلة أنها صعبة ولذلك عند تحويلها إلى دوال أخرى يسهل تكاملها باستخدام تعويضات معينة والتى سوف نذكر منها التحويلات المثلثية وسوف ندرس بعض الوسائل التى يمكن إيجادها

فى البداية نقدم بعض المتطابقات المثلثية الهامة والمستخدمة فى هذه التعويضات والتى تساعدنا كثيرا فى التكاملات كما يلى :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x \qquad \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$$

بالإضافة إلى ذلك نتذكر تفاضلات الدوال المثلثية .

** مثال (١)

أوجد قيمة التكامل : $\int \sec^4 2x \tan 2x dx$

** الحل

يمكننا إجراء التكامل كما يلى ، حيث أن $\sec 2x \tan 2x$ هى مشتقة $\frac{1}{2}\sec 2x$ وعليه نكتب التكامل فى الصورة التالية

$$I = \int \sec^4 2x \tan 2x dx = \int \sec^3 2x (\sec 2x \tan 2x) dx$$

ويمكن استخدام القانون التالى:

$$\int g^n(x) g(x) dx = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

فنحصل على :

$$I = \frac{1}{2}\int \sec^3 2x (2\sec 2x \tan 2x) dx = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}(\sec 2x)^4 + c = \frac{1}{8}(\sec 2x)^4 + c$$

** مثال (٢)

أوجد قيمة التكامل : $\int \tan^3 x dx$

** الحل

يمكننا إجراء التكامل كما يلى

$$\int \tan^3 x dx = \int \tan^2 x \tan x dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan x dx$$
$$= \int \sec^2 x \tan x dx - \int \tan x dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + c$$

(سوف نتعرض لمثل هذه التكاملات بطريقة أخرى وأكثر تعميماً فى التكامل بالاختزال المتتالى).

بعض المتطابقات المثلثية الهامة

** $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

** $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

** $\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$

** $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

** $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - \sin^2 x$

** $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

** $\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

** $\sin 2x = 2\sin x \cos x.$

** مثال (٣)

أوجد قيمة التكامل : $\int \cos 2x \cos 5x dx$

** الحل

يمكننا إجراء التكامل باستخدام التطبيقات السابقة كما يلى

$$\int \cos 2x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 7x + \cos 3x) dx = \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + c$$

وهكذا يمكن استخدام الصيغ الأخرى لإيجاد حواصل الضرب .

** تكاملات تشتمل على $\sqrt{a^2 \pm x^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$,

كثيرا ما يحدث وتشتمل بعض التكاملات على مثل هذه الجذور مثل بعض الحالات فى الصورة البسيطة الاتية :

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

ويكون أحيانا الغرض من مثل هذه التكاملات هو ظهورها فى صورتها الأكثر صعوبة والتى تشتمل على هذه الجذور وذلك بإجراء التغيير للمتغير مثل

$$x = a\sin x, \qquad x = a\sec x, \qquad x = a\tan x$$

ويمكن باختيار التغيير اللازم والمرتبط بإحدى المتطابقات الآتية بالترتيب :

$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

وسوف نوضح ذلك بالأمثلة الآتية :

** مثال

أوجد قيمة التكامل : $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx; \qquad a > 0$

** الحل

يمكننا إجراء التكامل باستخدام التعويضات السابقة كما يلى

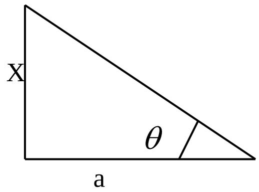
بوضع $x = a\sin\theta$ حيث $-\frac{\pi}{2} \le \theta \ge \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}=a\sqrt{1-\sin^2\theta}=a\cos\theta$$

فان التكامل يصبح على الصورة

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=\int \frac{a\cos\theta}{a^2\sin^2\theta}a\cos\theta d\theta=\int \cot^2\theta d\theta=\int (\operatorname{cosec}^2\theta-1)d\theta$$
$$=\int \operatorname{cosec}^2\theta d\theta-\int d\theta=\cot\theta-\theta+c$$

بما أن $x=a\sin\theta$ فانه يمكن رسم مثلث فيه $\sin\theta=\frac{x}{a}$ حيث



تكامل الدوال الكسرية (باستخدام الكسور الجزئية)

نعرف أن الدوال الكسرية هى دوال خارج قسمة على الصورة $\frac{f(x)}{g(x)}$ لكثيرتى حدود معاملتها حقيقية مثلاً : $\frac{x^2+3x+1}{5x^3-4x^2+x-2}$

سوف ندرس الآن كيف نوجد تكامل الدوال الكسرية

درسنا فى الجبر موضوع من إحدى الموضوعات الهامة والتى تستخدم كيفية تحليل المقدار الكسرى إلى كسوره الجزئية أو توحيد المقامات لتصبح كسراً واحداً فمثلاً أحيانا يكون لدينا المقدار الآتى :

$$\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x-4}=\frac{3(x-4)+5(x-1)}{(x-1)(x-4)}=\frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}$$

وأحياناً أخرى يكون لدينا

$$\frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}=\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x-4}$$

وذلك باستخدام طرق تحليل الكسور الجزئية المعروفة لإيجاد قيم A, B المعروفة .

لكى نعمم ذلك يجب أن نعمم هذه الطريقة بأن نعبر عن الكسر كحاصل جمع كسور فى صورة مبسطة لكى يسهل تكاملها بحيث ينطبق عليها شرطان هما :

الشرط الأول : هو أن الكسر يجب أن يكون فيه درجة البسط أقل من درجة المقام لكى يكون الكسر حقيقى .

الشرط الثانى : هو أن يحلل الكسر إلى عوامل خطية من الدرجة الأولى أو الدرجة الثانية ولا يمكن تحليلها ومعاملتها حقيقية.

** مثال (١)

أوجد قيمة التكامل $\int \frac{6x^3-11x^2+5x-4}{x^4-3x^3+x^2-2x}dx$

** الحل

من الملاحظ أن الدالة المكاملة هى دالة كسرية والكسر حقيقى ويمكن تحلية إلى عوامل خطية كما يلى :

$$\frac{6x^3-11x^2+5x-4}{x(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

ولإيجاد قيم الثوابت المختلفة A,B,C,D نقوم بجمع الكسور كما يلى :

$$\frac{6x^3-11x^2+5x-4}{x(x-2)(x^2+1)}=\frac{A(x-2)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x(x-2)}{x(x-2)(x^2+1)}$$

وعليه يكون

$$6x^3-11x^2+5x-4=A(x-2)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x(x-2)$$

بوضع x=0

-4=-2A, A=2

بوضع x=2

48-44+10-4=2B (5),   B=1

بوضع x=1

6-11+5-4=A(-1)(2)+2B+(C+D)(-1),   C+D=2   (*)

بوضع x=-1

-6-11-5-4=A(-3)(2)+B(-1)(2)+(-C+D)(-1)(-3),   C-D=4   (**)

بجمع العلاقتين (*) ، (**) ينتج أن

C=3,   D=-1

وعليه التكامل يصبح على الصورة :

$$\int \frac{6x^3-11x^2+5x-4}{x(x-2)(x^2+1)}dx=\int \frac{2}{x}dx+\int \frac{1}{(x-2)}dx+\int \frac{3x-1}{(x^2+1)}dx$$

$$= 2\ln|x|+\ln|x-2|+3\int\frac{xdx}{(x^2+1)}-\int\frac{dx}{(x^2+1)}$$

$$= 2\ln|x|+\ln|x-2|+\frac{3}{2}\ln|x^2+1|-\tan^{-1}x+c$$

`

$$= \ln\left|x^2(x-2)(x^2+1)^{3/2}\right|-\tan^{-1}x+c$$

** مثال (٢)

أوجد قيمة التكامل $\int \frac{9x^4+48x^3+37x^2-20x+3}{9x^3+12x^2-11x+2}dx$

** الحل

من الواضح هنا أن درجة لبسط أكبر من درجة المقام أى أن الكسر غير حقيقى لتحويلة إلى كسر حقيقى نجرى عملية القسمة كما يلى :

$$\frac{9x^4+48x^3+37x^2-20x+3}{9x^3+12x^2-11x+2}=x+4+\frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}$$

$$\int \frac{9x^4+48x^3+37x^2-20x+3}{9x^3+12x^2-11x+2}dx=\frac{x^2}{2}+4x+\int \frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}dx \quad (*)$$

التكامل الأخير يتحلل إلى

$$9x^3+12x^2-11x+2=(x+2)(3x-1)^2$$

لاحظ أن المقدار $(3x-1)$ عامل من الدرجة الأولى المكررة

وعلية فإن الدالة المكاملة فى التكامل الأخير يمكن التعبير عنها كحاصل جمع كسور جزئية على الصورة :

$$\frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(3x-1)}+\frac{C}{(3x-1)^2}$$

ثم نحاول إيجاد الثوابت A, B, C كما يلى :

$$22x-5=A(3x-1)^2+B(3x-1)(x+2)+C(x+2)$$

ثم بالتعويض عن قيم $x=\frac{1}{3}$, $x=-2$, $x=0$, نحصل على

$$-5=A-2B+2C \qquad (**)$$

$$44-5=A(49) \qquad A=-1$$

$$\frac{22}{3}-5=C(\frac{1}{3}+2), \qquad \frac{7}{3}=\frac{7}{3}C, \qquad C=1$$

بالتعويض فى العلاقة (**) نحصل على

$$2B=-1+5+2=6, \qquad B=3$$

وكذلك

$$\int \frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}dx=\int \frac{-1}{x+2}dx+\int \frac{3}{3x-1}dx\int \frac{3}{(3x-1)^2}dx$$

$$=\ln|x+2|+\ln|3x-1|-\frac{1}{3}\ln(3x-1)^{-1}+c=\ln\left|\frac{3x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(3x-1)}+c$$

بالتعويض فى العلاقة (*) نجد أن

$$\int \frac{9x^4+48x^3+37x^2-20x+3}{9x^3+12x^2-11x+2}dx=\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{3x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(3x-1)}+c$$

تمـارين

(١) أوجد قيمة التكاملات الاتية :

$$\int \frac{x^2+a}{x^3}dx\,;\int \frac{dx}{x^2-2x+8}\,;\int \frac{3x-4}{x-4}dx\,;\int \frac{dx}{x^2-8x+15}\,;$$

$$\int \sin^{-1}3y\,dy\,;\int (3x+x^2)\cos x\,dx\,;\int \sin^7\frac{x}{2}dx\,;\int \frac{dx}{x(x+4)}\,;$$

$$\int \frac{1+x^2}{x^2-4x+3}dx\,;\int \frac{dx}{x(x+1)^2}\quad\int \frac{y^5+3y^4+2y^3-y^2+4}{y^3+y^2+2y}dy\,;$$

$$\int \frac{dx}{2x^2+9}\,;\int \frac{dx}{x^2-6x+9}\,;\int x\sec^{-1}x\,dx$$

(٢) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}dx\,;\qquad \int \frac{x\,dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}\,;$$

$$\int \frac{x^7dx}{\sqrt{x^2-1}}\,;\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x-3}}\,;$$

$$\int \frac{u\,du}{u^2+u+1}\,;\qquad \int \frac{t\,dt}{(2t-1)^2}\,;$$

$$\int \frac{v\,dv}{v^2-3v+2}\,;\qquad \int \frac{x^4dx}{(x^3-3)^3}\,;\qquad \int \frac{y^5+1}{y^6+y^4}dy.$$

أمثلة متنوعة (محلولة)

** مثال (١)

أوجد قيمة التكامل $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$

** الحل

$$\int \frac{(1-\cos x)dx}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \int \frac{(1-\cos x)dx}{1-\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos x)dx}{\sin^2 x}$$

$$= \int (\sec^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x)dx = -\cot x + \operatorname{cosec} x + c$$

** مثال (٢)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

(1) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+10x+30}$

(3) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

** الحل

(1) $$\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + 3\sin^{-1} x + c$$

(2) $$\int \frac{dx}{x^2+10x+30} = \int \frac{dx}{(x+5)^2+5} = \int \frac{dx}{(x+5)^2+(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{5})^2}\tan^{-1}\left(\frac{x+5}{\sqrt{5}}\right) + c$$

(3) $$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)+6}{x^2-4x+8}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)}{x^2-4x+8}dx + 3\int \frac{1}{x^2-4x+8}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+8) + 3\int \frac{1}{(x-2)^2+4}dx$$

$$= \ln\sqrt{(x^2-4x+8)} + \frac{3}{2}\tan^{-1}(\frac{x-2}{2}) + c$$

$$(4) \int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2x+4)-8}{\sqrt{4x-x^2}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}}dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 4\sin^{-1}(\frac{x-2}{2}) + c$$

**** مثال (٣)**

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1) \int \frac{(2-x)dx}{4x^2+4x-3} \qquad (2)\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$$

$$(3) \int \sqrt{3-2x-x^2}dx$$

** الحل

$$(1) \int \frac{(2-x)dx}{4x^2+4x-3} = -\frac{1}{8}\int \frac{8x+4}{4x^2+4x-3}dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(2x+1)^2-4}$$

$$= -\frac{1}{8}\ln(4x^2+4x-3) + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right| + c$$

$$(2) \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-4}}dx$$

$$= \int \sqrt{x^2+2x-3} + 2\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2-4}\right| + c$$

$$(3) \int \sqrt{3-2x-x^2}dx$$

لإجراء هذا التكامل نتبع الآتى : نضع

$$x+1 = 2\sin\theta, \qquad dx = 2\cos\theta d\theta$$

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}dx$$

$$= 4\int \cos^2\theta d\theta = 2\int (1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= 2(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}) + c, \qquad \theta = \sin^{-1}\frac{x+1}{2}$$

وباستخدام قوانين حساب المثلثات نجد أن :

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}dx = 2\theta+\sin 2\theta+c = 2\theta+2\sin\theta\cos\theta+c$$

$$= 2\sin^{-1}(\frac{x+1}{2})+(\frac{x+1}{2})\sqrt{3-2x-x^2}+c$$

حيث $\cos\theta = \sqrt{3-2x-x^2}+c$

**** مثال (٤)**

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$(1) \int \sec^3 x dx$ $\qquad$ $(2) \int \operatorname{cosec}^3 x dx$

**** الحل**

هذه التكاملات تكتب فى الصورة

$$(1) \int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 x dx = \int \sec x d\tan x$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx$$

وذلك باستخدام التكامل بالتجزئ وعليه نجد أن

$$u = \sec x, \qquad \Rightarrow \qquad du = \sec x \tan x dx$$

$$dv = d\tan x, \qquad \Rightarrow \qquad v = \tan x$$

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx \int \sec x dx$$

$$2\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + c$$

وعليه يكون

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$$

وكذلك بنفس الطريقة يمكن إجراء التكامل التالى

$$\int \operatorname{cosec}^3 x dx = \int \operatorname{cosec} x \operatorname{cosec}^2 x dx$$

** مثال (٥)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1)\int \sin 3x \sin 2x dx \qquad (2)\int \sin 3x \sin 5x dx$$

$$(3)\int \cos 4x \cos 2x dx$$

** الحل

$$(1)\int \sin 3x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int [\cos(3x-2x)-\cos(3x+2x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos x-\cos 5x]dx = \frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{10}\sin 5x + c$$

والمثل يمكن حساب التكامل بالنسبة للتكاملات الأخرى باستخدام القوانين المختلفة لحساب المثلثات .

** مثال (٦)

أوجد قيمة التكامل الآتي : $\int \cot^3 x \operatorname{cosec}^5 x dx$

** الحل

$$\int \cot^3 x \operatorname{cosec}^5 x dx = \int \cot^2 x \operatorname{cosec}^4 x \cot x \operatorname{cosec} x dx$$

$$= \int (\operatorname{cosec}^2 x-1)\operatorname{cosec}^4 x \cot x \operatorname{cosec} x dx$$

$$= \int (\operatorname{cosec}^6 x-\operatorname{cosec}^4 x)\cot x \operatorname{cosec} x dx$$

$$= -\frac{1}{7}\operatorname{cosec}^7 x+\frac{1}{5}\operatorname{cosec}^5 x + c$$

** مثال (٧)

أوجد قيمة التكامل الآتي : $\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}}$

** الحل

باستخدام إكمال المربع داخل الجذر بالمقام نجد أن

$$\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}} = \int \frac{dx}{(4(x-3)^2-9)^{3/2}}$$

وباستخدام التعويض نحصل على

$$x-3=\frac{3}{2}\sec z, \qquad dx=\frac{3}{2}\sec z\tan z\,dz$$

$$\int\frac{dx}{(4(x-3)^2-9)^{3/2}}=\int\frac{\frac{3}{2}\sec z\tan z}{27\tan^3 z}dz=-\frac{1}{18}\operatorname{cosec} z+c$$

وباستخدام المثلثات والتعويض نجد أن :

$$\int\frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}}=-\frac{1}{9}\frac{x-3}{\sqrt{4x^2-24x+27}}+c$$

** مثال (٨)

أوجد قيمة التكامل الآتي : $\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x-1}dx$

** الحل

بتحويل الدالة القياسية إلى كسورها الجزئية نجد أن

$$\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+4\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}|x-1|-\frac{4}{x-1}+c=\frac{-4}{x-1}+\frac{1}{2}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+c$$

** مثال (٩)

أوجد قيمة التكامل الآتي : $\int\frac{3x+5}{(x-2)\sqrt{x+2}}dx$

** الحل

نضع

$$x+2=z^2, \qquad dx=2z\,dz\,, \qquad x=z^2-2$$

$$\int\frac{3x+5}{(x-2)\sqrt{x+2}}dx=\int\frac{2z}{z(z^2-4)}dz=2\int\frac{dz}{z^2-4}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right| + c$$

** مثال (١٠)

أوجد قيمة التكامل الآتي : $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$

** الحل

نضع

$$x^2+x+2=(z-x)^2$$

$$x=\frac{z^2-z}{1+2z}, \qquad dx=\frac{2(z^2+z+2)dz}{(1+2z)^2}$$

$$\sqrt{x^2+x+2}=\frac{z^2+z+2}{1+2z}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}} = \int \frac{dz}{z^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2}+x+\sqrt{2}}\right| + c$$

** مثال (١١)

أوجد قيمة التكامل الآتي : $\int x^5\sqrt{1-x^3}dx$

** الحل

باستخدام التعويض $1-x^3=z^2$ نحصل على

$$\int x^5\sqrt{1-x^3}dx = \int (1-z^2)z(-\frac{2}{3}zdz) = -\frac{2}{3}\int (1-z^2)z^2dz$$

$$= -\frac{2}{3}(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5})+c = -\frac{2}{45}(1-x^3)^{3/2}(2+3x^3)+c$$

** مثال (١٢)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

(1) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (2) $\int \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}}\,dx$

(3) $\int \tan^3 x \sec^2 x\,dx$ (4) $\int \sinh^5 x \cosh x\,dx$

(5) $\int \dfrac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$ (6) $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$

(7) $\int \dfrac{e^x}{1+e^x}\,dx$ (8) $\int \dfrac{dx}{x(1+\log x)}$

** الحل

سوف نكتب $df(x) = f'(x)dx$ فنحصل على

$$(1) \int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3 + c$$

$$(2) \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+3x+1)^{-1/2}\,d(x^3+3x+1)$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{x^3+3x+1} + c$$

ملحوظة

إذا كان البسط تفاضل الدالة ما بداخل الجذر فى المقام فان نتيجة التكامل هى ضعف الجذر

$$\int \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + c$$

$$(3) \int \tan^3 x \sec^2 x\,dx = \int \tan^3 x\,d\tan x = \frac{\tan^4 x}{4} + c$$

$$(4)\int \sinh^5 x\cosh x\,dx=\int \sinh^5 x\,d\sinh x=\frac{\sinh^6 x}{6}+c$$

$$(5)\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)}{x^2+2x+5}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}=\log\sqrt{x^2+2x+5}+c$$

$$(6)\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx=\int \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}=-\log(1+\cos x)+c$$

$$(7)\int \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x}=\log(1+e^x)+c$$

$$(8)\int \frac{dx}{x(10+\log x)}=\int \frac{dx/x}{(1+\log x)}=\int \frac{d(1+\log x)}{(1+\log x)}=\log(1+\log x)+c$$

** مثال (١٣)

أوجد قيمة التكامل الآتي : $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$

** الحل

$$\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx=\int \sin^4 x\cos^4 x\cos x\,dx=\int \sin^4 x(1-\sin^2 x)^2 d\sin x$$

$$=\int \sin^4 x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)d\sin x=\int (\sin^4 x-2\sin^6 x+\sin^8 x)d\sin x$$

$$=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}+c$$

التكامل باستخدام التحميل

نفرض انه يراد $\int f(x)dx$ ، نضع $x = g(t)$ فيكون

$$f(x)dx = f(g(t))dg(t)$$

فإذا أمكن حساب قيمة التكامل فى الطرف الأيسر فان قيمته تكون هى قيمة التكامل فى الطرف الأيمن ومن اشهر صيغ التعويض هى :

أولاً : التعويض بالدوال المثلثية أو الزائدية لإزالة الجذور التربيعية وفيما يلى الصيغ المناسبة لكل حالة :

(١) فى التكاملات التى تحتوى $\sqrt{a^2 - x^2}$ ضع

$$x = a\sin u; \qquad x = a\tanh u$$

ويفضل استخدام التعويض الأول إذا وجد الجذر فى البسط والتعويض الثانى إذا وجد الجذر فى المقام .

(٢) فى التكاملات التى تحتوى $\sqrt{a^2 + x^2}$ ضع

$$x = a\tan u; \qquad x = a\sinh u$$

ويفضل استخدام التعويض الأول إذا وجد الجذر فى المقام والتعويض الثانى إذا وجد الجذر فى البسط .

(٣) فى التكاملات التى تحتوى $\sqrt{x^2 - a^2}$ ضع

$$x = a\sec u; \qquad x = a\cosh u$$

ويفضل استخدام التعويض الأول إذا وجد الجذر فى المقام والتعويض الثانى إذا وجد الجذر فى البسط .

(٤) إذا كان تحت الجذر عامل من الدرجة الثانية فانه يلزم أولا تحويلة إلى مربع كامل فتحول إلى إحدى الصور الثلاثة السابقة وبعد ذلك نستخدم التعويض المناسب .

** مثال (١)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1)\ \int (1-x^2)^{1/2}dx \qquad (2)\ \int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$$

$$(3)\ \int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$$

** الحل

$$(1)\ \int (1-x^2)^{1/2}dx$$

نضع

$$x=\sin\theta; \qquad dx=a\cos\theta d\theta$$

$$\int (1-x^2)^{1/2}dx = \int (\cos^2\theta)^{1/2}\cos\theta d\theta = \int \cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{1}{2}(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2})+c = \frac{1}{2}(\theta+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2})+c$$

$$= \frac{1}{2}(\sin^{-1}x + x\sqrt{1-x^2})+c$$

$$(2)\ \int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$$

نضع

$$x=3\sinh u; \qquad du=3\cosh u du$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx = \int \frac{(9\cosh^2 u)^{1/2}3\cosh u du}{9\sinh^2 u} = \int \coth^2 u du$$

$$= \int (1+\cos ch^2 u)du = u-\coth u+c = \sinh^{-1}\frac{x}{3}-\frac{\cosh u}{\sinh u}+c$$

$$= (\sinh^{-1}\frac{x}{3} - \frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}}{\frac{x}{3}} + c = (\sinh^{-1}\frac{x}{3} - \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} + c$$

(3) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$

نضع

$$x = \sec\theta; \qquad dx = \sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} = \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{(\tan^2\theta)^{3/2}} d\theta = \int \frac{\sec\theta t}{\tan^2\theta} d\theta$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta = \int \frac{d(\sin\theta)}{\sin^2\theta} = \int \frac{-1}{\sin\theta} + c$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} + c = \frac{-1}{\cos\theta\sqrt{\sec^2\theta - 1}} + c$$

$$= \frac{-\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}} + c = \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}} + c$$

** مثال (٢)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

(1) $\int \sqrt{21-4x-x^2}dx$ (2) $\int \sqrt{x^2+2x+10}dx$

(3) $\int \sqrt{x^2+6x+5}dx$

** الحل

$$(1) \int \sqrt{21-4x-x^2}dx = \int \sqrt{21-(x^2+4x)}dx$$

$$= \int \sqrt{21-(x+2)^2-4}dx = \int \sqrt{25-(x+2)^2}d(x+2)$$

نستخدم التعويض بوضع

$$(x+2) = 5\sin\theta, \qquad dx = 5\cos\theta d\theta$$

$$25-(x+2)^2 = 25-25\sin^2\theta = 25(1-\sin^2\theta) = 25\cos^2\theta$$

$$\int \sqrt{21-4x-x^2}dx = \int \sqrt{25\cos^2\theta}.5\cos\theta d\theta = \int 25\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{25}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{25}{2}(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}) + c$$

$$= \frac{25}{2}(\theta + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2}) + c$$

$$= \frac{25}{2}\left\{\sin^{-1}\frac{x+2}{5} + \frac{x+2}{5}\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{5}\right)^2}\right\} + c$$

$$= \frac{25}{2}\left\{\sin^{-1}\frac{x+2}{5} + \frac{x+2}{5}\sqrt{25-(x+2)^2}\right\} + c$$

$$= \frac{25}{2}\left\{\sin^{-1}\frac{x+2}{5} + \frac{x+2}{5}\sqrt{21--4x-x^2}\right\} + c$$

(2) $\int \sqrt{x^2+2x+10}dx = \int \sqrt{(x+1)^2+9}dx$

نستخدم التعويض بوضع

$(x+1) = 3\sinh\theta, \qquad dx = 3\cosh\theta d\theta$

$(x+1)^2 + 9 = 9\sinh^2\theta + 9 = 9\cosh^2\theta$

$$\int \sqrt{21-4x-x^2}dx = \int 3\cosh\theta.3\cosh\theta d\theta = \int 9\cosh^2\theta d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int (1+\cosh 2\theta)d\theta = \frac{9}{2}(\theta + \frac{\sinh 2\theta}{2}) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sinh^{-1}\frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{3}\sqrt{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1}\right\} + c$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sinh^{-1}\frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{3}\sqrt{x^2+2x+10}\right\} + c$$

$$= \frac{1}{2}\left\{9\sinh^{-1}\frac{x+1}{3} + (x+1)\sqrt{x^2+2x+10}\right\} + c$$

$$(3)\ \int \sqrt{x^2+6x+5}\,dx = \int \sqrt{(x+3)^2-4}\,dx$$

نستخدم التعويض بوضع

$$(x+3) = 2\cosh\theta, \qquad dx = 2\sinh\theta\,d\theta$$

$$(x+3)^2-4 = 4\cosh^2\theta-4 = 4\sinh^2\theta$$

$$\int \sqrt{x^2+6x+5}\,dx = 2\int \sinh\theta.3\cosh\theta\,d\theta$$

$$= 2\int (\cosh 2\theta-1)\,d\theta = 2\left(\frac{\sinh 2\theta}{2}-\theta\right)+c$$

$$= 2(\sinh\theta\cosh\theta-\theta)+c$$

$$= 2\left\{\frac{x+3}{2}\sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2-1}-\cosh^{-1}\frac{x+3}{2}\right\}+c$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(x+3)\sqrt{x^2+6x+5}-2\cosh^{-1}\frac{x+3}{2}\right\}+c$$

** مثال (٣)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1)\ \int \frac{5x}{x^2+x-6}\,dx \qquad\qquad (2)\ \int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$$

** الحل

$$(1)\ \int \frac{5x}{x^2+x-6}\,dx$$

نحول المقدار $\frac{5x}{x^2+x-6}dx$ إلى كسوره الجزئية

$$\frac{5x}{x^2+x-6} = \frac{5x}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}$$

$$\int \frac{5x}{x^2+x-6}\,dx = 2\int \frac{1}{x-2}\,dx + 3\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= 2\log(x-2)+3\log(x+3)+c = \log(x-2)^2+\log(x+3)^3+c$$

$$(2)\ \int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$$

نحول المقدار $\frac{1}{x(x-1)^2}$ إلى كسوره الجزئية

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= \log x + \log(x-1) - \frac{1}{(x-1)} + c$$

تمارين

(١) أوجد قيمة التكاملات الاتية :

$$\int \frac{\sec x}{1+\tan x}dx; \qquad \int \frac{\sin 3x}{\sqrt{2\cos 3x+5}}dx;$$

$$\int \frac{2+\log x}{x}dx; \qquad \int \frac{1}{e^x(3+e^{-x})}dx;$$

$$\int \frac{\sin x}{e^x}dx; \qquad \int \frac{\log^3 x}{x}dx;$$

$$\int \frac{\tan x}{\log\cos x}dx \qquad \int (\sec x e^{\tan x})^2 dx;$$

(٢) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int \frac{e^t+2}{e^t}dx; \qquad \int \frac{x^2+a^2}{x^3}dx;$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx; \qquad \int \frac{1}{x^2-2x+8}dx;$$

$$\int e^{\sin z}\cos z dz; \qquad \int \frac{8x-4}{x-4}dx;$$

$$\int \frac{1}{x^2-8x+15}dx \qquad \int \sqrt{\sin z}\cos z dz;$$

(٤) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$\int \cos^5 x dx;$ $\int \operatorname{cosec}^5 z \cot z dz;$

$\int \cos^3 x dx;$ $\int \cos^7 \frac{x}{2} dx$

(٥) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$\int \frac{1}{x(x+1)} dx;$ $\int \frac{x^3+1}{x^2-4x+3} dx;$ $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$