محاضرة دوال خاصة

اعداد

د. أحمد محمد يوسف

استاذ الرياضيات البحتة المساعد

الدوال فوق الهندسية
The Hypergeometric Functions

مقدمة:

نظراً لوجود العديد من الدوال الخاصة التي يمكن تمثيلها بواسطة متسلسلة الدالة فوق الهندسية، فقد أحتلت هذه المتسلسلة أهمية كبيرة، حيث تستخدم هذه المتسلسلة في حل عديد من المسائل الرياضية والفيزيائية والهندسية.

أستخدم مصطلح" متسلسلة فوق الهندسية " لأول مرة من قبل جون واليس **John Wallis** في كتابه**(1655) Arithmetica Infinitorum.**

وقد درست متسلسلة الدالة فوق الهندسية ايضاً من قبل ليونارد أويلر**Leonhard Euler** ، ولكن أعطيت لأول مرة كحل لنظام كامل من قبل كارل فريدريش جاوس **Carl Friedrich Gauss** في **(1813)**، ثم شملت الدراسات في القرن التاسع عشر علي ذلك المتسلسلة من قبل إرنست كومر **(1836)** **Ernst Kummer**، وايضاً درسة تلك المتسلسلة كحل لمعادلة تفاضلية من قبل برنهارد ريمان

وفي هذا الباب نذكر تعريف للدوال فوق الهندسية ذات المتغير الواحد وكيفية استنتاج الدوال الأخري كحالات خاصة من الدوال فوق الهندسية، ايضاً سوف ندرس بعض خواص الدوال فوق الهندسية مثل صيغتها التفاضلية وصيغتها التكاملية ومعادلتها التفاضلية والعلاقات المتجاورة لها.

الدالة فوق الهندسية The Hypergeometric Function

أولاً:– سنعرف الرمز $(\alpha)_n$ وهو يطلق عليه رمز بوشهمر(Pochhammer symbol) أو رمز آبل (Appel's symbol) وهو كالآتي:

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1); \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

ويكتب بدلالة دالة جاما علي الشكل التالي:

$$(\alpha)_n = \frac{1.2....(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1.2\ldots(\alpha-1)} = \frac{(\alpha+n-1)!}{(\alpha-1)!}$$

$$\therefore (\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}; \quad (1)_n = n!, \ (\alpha)_0 = 1 \qquad (2.1)$$

إذا كانت α, n أعداد صحيحة وكان $0 \le \alpha < n$ فأن $(-\alpha)_n = 0$

مثال توضيحي :-

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_2 = \alpha(\alpha+1), \quad (-2)_4 = (-2)(-1)(0)(1) = 0$$

$$(1)_5 = 1.2.3.4.5 = 5!, \quad (3)_5 = 3.4.5.6.7 = \frac{\Gamma(3+5)}{\Gamma(3)}$$

Some properties Pochhammer symbol <u>بعض خصائص رمز بوشمر</u>

$$(i)\ (\alpha)_n = (\alpha)_{n-1}(\alpha+n-1)$$

$$(ii)\ (\alpha)_{-n} = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n)} = \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n}; \alpha \neq 1, 2, ...$$

$$(iii)\ (\alpha)_{n+m} = (\alpha)_n\,(\alpha+n)_m = (\alpha)_m\,(\alpha+m)_n$$

$$(iv)\ (2\alpha)_{2n} = 2^{2n}\,(\alpha)_n\,(\alpha+\frac{1}{2})_n .$$

يترك البرهان كتمرين للطالب

ويمكن تعريف الدالة فوق الهندسية في الشكل العام كالآتي:

$$
{}_pF_q(a_1,a_2,\ldots,a_p;b_1,b_2,\ldots,b_q;x)
$$

$$
=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\,(a_2)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\,(b_2)_n\cdots(b_q)_n}\frac{x^n}{n!}
$$

وسنقوم الآن بعرض أهم الحالات الخاصة الناتجة من الصورة العامة للدالة فوق الهندسية:

١- عندما $p=2, q=1$ نحصل علي تعريف الدالة فوق الهندسية (دالة جاوس **Gauss Function**) في شكل التسلسلة الأتية:-

$$
1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{x^3}{3!}+\ldots
$$

ونلاحظ أن هذه المتسلسلة متقاربة دائماً عند $|x|<1$ ومتباعدة عند $|x|>1$ ، أما إذا كانت $x=1$ فأن التقارب يتحقق تحت الشرط $c<a+b$ وعند $x=-1$ فإن التقارب يتحقق مع الشرط $c<a+b-1$ ، وفي حالة التقاربُ عموماً يعبر عن المتسلسلة (**2.2**) في الشكل الآتي:-

$$
{}_2F_1(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!} \qquad (2.4)
$$

٢- عندما $p=1,\ q=1$ نحصل علي الدالة فوق الهندسية لكومر(الرافدة) **hypergeometric function Kummer (Confluent)** وتعطي في الصورة الأتية:-

$$
{}_2F_1(a;b;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n}\frac{x^n}{n!} \qquad (2.5)
$$

ويمكن أستنتاج عديد من الدوال المعروفة لدينا كحالات خاصة من خلال العلاقات (**2.4**) و (**2.5**) كما سيتضح من الأمثلة الأتية:

مثال ١ :- أثبت أن

$$(i)\ \ {}_2F_1(1,b;b;x)=\frac{1}{(1-x)}\quad or\quad {}_1F_0(a,-;-;x)=(1-x)^{-a}$$

$$(ii)\ \ {}_2F_1(-n,b;b;-x)=(1+x)^{n}$$

$$(iii)\ \ \lim_{b\to\infty}{}_2F_1(1,b;1;\frac{x}{b})=e^{x}\quad or\quad {}_1F_1(a,-;a;x)=e^{x}$$

$$(iv)\ \ {}_2F_1(1,1;2;-x)=\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$(v)\ \ {}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^{2})=\frac{\sin^{-1}x}{x}$$

$$(vi)\ \ {}_2F_1(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};-x^{2})=\frac{\tan^{-1}x}{x}$$

الحـل:- (i)

$$ {}_2F_1(1,b;b;x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1)_n \frac{x^n}{n!} $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = (1-x)^{-1} $$

(ii)

$$ {}_2F_1(-n,b;b;-x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-n)_k \frac{(-x)^k}{k!} $$

$$ \because (-n)_k = -n(-n+1)(-n+2)\ldots(-n+k-1) $$

$$ = (-1)^k \, [n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)] $$

$$ = (-1)^k \, n! = (-1)^k \binom{n}{r} $$

$$ \therefore {}_2F_1(-n,b;b;-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{r} \frac{(-x)^k}{k!} $$

$$=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{3}+\ldots$$

$$=(1+x)^{n}$$

(iii) بوضع **(2.4)** في الصورة الأتية

$${}_2F_1(1,b;1;\frac{x}{b})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n\,(b)_n}{(1)_n}\frac{(\frac{x}{b})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{(b)^n}\frac{x^n}{n!}$$

$$\because\quad \lim_{b\to\infty}\frac{(b)_n}{(b)^n}=\lim_{b\to\infty}[\frac{b}{b}.\frac{(b+1)}{b}.\frac{(b+2)}{b}\ldots\frac{(b+n+1)}{b}]$$

$$=\lim_{b\to\infty}[(1+\frac{1}{b}).(1+\frac{2}{b})\ldots(b1+\frac{n-1}{b})]=1$$

$$\therefore\ \lim_{b\to\infty}{}_2F_1(1,b;1;\frac{x}{b})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{21!}+\ldots=e^x$$

(iV بأستخدام مفكوك $\ln(1+x)$

$$\therefore \ln(1+x)=\int \frac{dx}{1+x}=\int (1+x)^{-1}dx$$

$$=\int (1-x+x^2-x^3+x^4+\ldots)dx$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

وعليه نجد أن

$$\frac{1}{x}\ln(1+x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots$$

أيضاُ من تعريف دالة جاوس

$$_2F_1(1,1;2;-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n\,(1)_n}{(2)_n}\frac{(-x)^n}{n!}$$

$$\because (1)_n=n!,\quad (2)_n=2(3)(4)\ldots(2+n-1)=(n+1)!$$

$$\therefore {}_2F_1(1,1;2;-x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots.$$

(٧) بأستخدام مفكوك $\sin^{-1} x$

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

وحيث أن

$$(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} = 1 + (\frac{-1}{2})(-x^2) + \frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})\ \ (-x^2)^2}{2!} + \frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})(\frac{-5}{2})\ \ (-x^2)^3}{3!} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{(4)\,2!}x^4 + \frac{(3)(5)}{(2.4)\,3!}x^6 + \ldots.$$

ومن ذلك نجد أن

$$\int_0^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{3}{4.5.2!}x^5 + \frac{(3)(5)}{(2.4.7).3!}x^7 + \ldots.$$

$$\therefore \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1 + \frac{1}{2.3}x^2 + \frac{3}{4.5.2!}x^4 + \frac{(3)(5)}{(2.4.7).3!}x^6 + \ldots.$$

ومن العلاقة (2.4) نستنتج أن

$${}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2) = 1 + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{(\frac{3}{2})1!}x^2 + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{31}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})}{(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})\,2!}(x^2)^2 + \ldots$$

$${}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2) = 1 + \frac{1}{(2.3)\,1!}x^2 + \frac{3}{(4.5)\,2!}x^4 + \frac{3.5}{(2.4.7)\,3!}x^6 + \ldots$$

الخصائص الأساسية للدالة فوق الهندسية

Elementary Properties of the Hypergeometric Function

خاصية التماثل Symmetric

$$\boxed{{}_2F_1(a,b;c;x) = {}_2F_1(b,a;c;x)}$$

الصيغة التفاضلية Differentiation formula

$$\boxed{\frac{d^n}{dx^n}\,{}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n}\,{}_2F_1(a+n,b+n;c+n;x);\ \ n=1,2,3,\ldots}$$

البرهان: يمكن أثباتها بأستخدام الأستنتاج الرياضي وذلك بوضع $n=1$ في العلاقة السابقة نحصل علي

$$\frac{d}{dx}\,{}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{a\,b}{c}\,{}_2F_1(a+1,b+1;c+1;x)$$

حيث أن

$$\frac{d}{dx}\,{}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{a})_n\,(b)_n}{(c)_n}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{n(a)}_n \ (b)_n}{(c)_n} \cdot \ \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{(a)}_n \ (b)_n}{(c)_n} \cdot \ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\because \ \mathrm{(a)}_{n+1} = a\,(\mathrm{a+1})\,(\mathrm{a+2})\,....(\mathrm{a+n-1})(\mathrm{a+n}) = \mathrm{(a)}_n(\mathrm{a+n})$$

$$a\,(\mathrm{a+1})_n = a\,(\mathrm{a+1})\,(\mathrm{a+2})\,....(\mathrm{a+n-1})(\mathrm{a+n}) = \mathrm{(a)}_n(\mathrm{a+n})$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\,{}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{(a)}_{n+1} \ (b)_{n+1}}{(c)_{n+1}} \cdot \ \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{a\,b}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{(a+1)}_n \ \mathrm{(b+1)}_n}{\mathrm{(c+1)}_n} \cdot \ \frac{x^n}{n!} = {}_2F_1(a+1,b+1;c+1;x)$$

وبفرض أن $n = k$

$$\frac{d^k}{dx^k}\,{}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{(a)_k \ (b)_k}{(c)_k} \ \ {}_2F_1(a+k,b+k;c+k;x)$$

ولأثبات صحة العلاقة عند $n=k+1$ بأستخدام الفرض نجد أن

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\,{}_2F_1(a,b;c;x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{d^k}{dx^k}\,{}_2F_1(a,b;c;x)\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\;{}_2F_1(a+k,b+k;c+k;x)\right]$$

$$=\frac{(a)_{k+1}\,(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}}\;{}_2F_1(a+k+1,b+k+1;c+k+1;x)$$

أذن العلاقة صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة

<u>ملحوظة</u>:– يمكن استنتاج العديد من الصيغ التفاضلية الأخري للدالة فوق الهندسية

الصيغة التكاملية Integral representation

$$\boxed{\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;x) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}F(a,-;-;xt)\,dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\,dt; \quad c>b>0 \end{aligned}}$$

البرهان: باستخدام العلاقة (2.1) مع خصائص دالة بيتا نجد أن

$$\frac{(b)_n}{(c)_n} = \frac{\Gamma(\mathrm{b+n})\Gamma(\mathrm{c})}{\Gamma(b)\Gamma(\mathrm{c+n})} = \frac{B(\mathrm{b+n,c-b})}{B(\mathrm{b,c-b})} = \int_0^1 (1-\mathrm{t})^{c-b-1}\, t^{b+n-1}\,dt \qquad (2.12)$$

من العلاقة (2.4) يمكن كتابة الاتي

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{1}{B(\mathrm{b,c-b})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{a})_n}{n!}x^n\int_0^1 (1-\mathrm{t})^{c-b-1}\, t^{b+n-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{B(\mathrm{b,c-b})}\int_0^1 (1-\mathrm{t})^{c-b-1}\, t^{b-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{a})_n}{n!}(xt)^n\right\}dt \qquad (2.13)$$

من العلاقات (2.12) ، (2.13) نحصل علي

$$ {}_2F_1(a,b;c;x)=\frac{1}{B(\mathrm{b},\mathrm{c}-\mathrm{b})}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}F(a,-;-;xt)\,dt $$

$$ \because\ {}_1F_0(a,-;-;xt)=(1-xt)^{-a}; \qquad |\mathrm{xt}|<1 $$

$$ B(\mathrm{b},\mathrm{c}-\mathrm{b})\,{}_2F_1(a,b;c;x)=\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\,dt; \quad |xt|<1,\ c>b>0 \qquad (2.14) $$

وبوضع $x=1$ في المعادلة **(2.14)** نحصل علي العلاقة الأتية

$$ {}_2F_1(a,b;c;1)=\frac{B(\mathrm{b},c-a-b)}{B(\mathrm{b},\mathrm{c}-\mathrm{b})}=\frac{\Gamma(\mathrm{c})\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(\mathrm{c}-\mathrm{a})\Gamma(\mathrm{c}-\mathrm{b})} \qquad (2.15) $$

٤–العلاقات التكرارية Recurrence relations

$$(i)\ x\frac{d}{dx}\,{}_2F_1(a,b;c;x)+a\ {}_2F_1(a,b;c;x)=a\,{}_2F_1(a+1,b;c;x)$$

$$(ii)\ x\frac{d}{dx}\,{}_2F_1(a,b;c;x)+b\ {}_2F_1(a,b;c;x)=b\,{}_2F_1(a,b+1;c;x)$$

$$(iii)\ (a-b)\,{}_2F_1(a,b;c;x)=a\,{}_2F_1(a+1,b;c;x)-b\ {}_2F_1(a,b+1;c;x)$$

البرهان: (i)

$$x\frac{d}{dx}\,{}_2F_1(a,b;c;x)+a\ {}_2F_1(a,b;c;x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{a})_n\,(\mathrm{b})_n}{(\mathrm{c})_n}\frac{n\,x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{a}(\mathrm{a})_n\,(\mathrm{b})_n}{(\mathrm{c})_n}\frac{n\,x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{a}+\mathrm{n})(\mathrm{a})_n\,(\mathrm{b})_n}{(\mathrm{c})_n}\frac{x^n}{n!}=a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{a}+1)_n\,(\mathrm{b})_n}{(\mathrm{c})_n}\frac{x^n}{n!}$$

من ذلك نستنتج ان

$$x\frac{d}{dx}\,{}_2F_1(a,b;c;x)+a\;{}_2F_1(a,b;c;x)=a\,{}_2F_1(a+1,b;c;x)$$

بالمثل من خاصية التماثل نحصل علي العلاقة (ii) وبطرح العلاقة (ii) من العلاقة (i) نحصل علي العلاقة (iii)

<u>ملحوظة</u>:- هذه بعض من العلاقات التكرارية ويمكن استنتاج العديد من العلاقات التكرارية الأخرى

ه-المعادلة التفاضلية The Hypergeometric equation

$$\boxed{x(1-x)w''+[c-(a+b+1)x]w'-ab\,w=0.}$$

البرهان: \توجد طرق كثيرة لأثبات مدي تحقيق الدالة فوق الهندسية لهذه المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية

وسوف نستنتج ذلك هنا بأستخدام المؤثر التفاضلي الآتي:-

$$\delta = \mathrm{x}\left(\frac{d}{dx}\right) \quad \Rightarrow \quad \delta x^{n} = n x^{n}$$

بفرض ان $w=F(\mathrm{a,b;c;x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{a})_n(\mathrm{b})_n}{(\mathrm{c})_n}\cdot\frac{x^n}{n!}$ بحيث ان

$$\delta(\delta+c-1)w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{n(n+c-1)(a)}_n(\mathrm{b})_n}{(\mathrm{c})_n}\cdot\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{a})_n(\mathrm{b})_n}{(\mathrm{c})_{n-1}}\cdot\frac{x^n}{(n-1)!}$$

بعمل ازاحة للمتسلسلة نجد ان

$$\delta(\delta+c-1)w=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_n}.\frac{x^n}{n!}$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+n)(b+n)(a)_n(b)_n}{(c)_n}.\frac{x^n}{n!}$$

$$=[x(\delta+a)(\delta+b)]w$$

أذن نحصل علي

$$[\delta(\delta+c-1)-x(\delta+a)(\delta+b)]w=0$$

والتي يمكن كتابتها في الصورة

$$x(1-x)w''+[c-(a+b+1)x]w'-abw=0.$$

ملحوظة:- جميع الخصائص التي تم ذكرها للدالة فوق الهندسية لجاوس يمكن استنتاجها للدالة فوق الهندسية لكومر (الرافدة)

تمـارين (٢)

١. تحقق من صحة المتطابقات الأتية:

$$(i)\,(a+1)_n - n(a+1)_{n-1} = (a)_n \qquad (ii)\,(a-1)_n + n(a)_{n-1} = (a)_n$$

$$(iii)\,\Gamma(a+1-n) = \frac{(-1)^n\,\Gamma(a+1)}{(-a)_n} \qquad (iv)\;(a)_{3n} = 3^{3n}\,(\tfrac{1}{3}a)_n\,(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}a)_n\,(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}a)_n$$

٢. أثبت صحة العلاقات الأتية:-

$$(i)\quad \lim_{a,b\to\infty} {}_2F_1(a,b;\tfrac{3}{2};\tfrac{-x^2}{4ab}) = \frac{\sin x}{x}$$

$$(ii)\ \ln\{\frac{1+x}{1-x}\} = 2x\,{}_2F_1(\tfrac{1}{2},1;\tfrac{3}{2};x^2)$$

(iii) $_2F_1(a,b;\mathrm{c};\mathrm{x})=(1-\mathrm{x})^{-a}\ _2F_1(a,\mathrm{c}-b;\mathrm{c};\dfrac{\mathrm{x}}{x-1})$

(iv) $_1F_1(a,-;\mathrm{b};\mathrm{x})=\mathrm{e}^{x}\ _1F_1(\mathrm{b}-a,-;\mathrm{b};-\mathrm{x})$

٣. تحقق من الصيغ التفاضلية الأتية:-

(i) $\dfrac{d}{dx}[x^{a}\ _2F_1(a,b;c;\mathrm{x})]=a\,x^{a-1}\ _2F_1(a+1,b;c;\mathrm{x})$

(ii) $x\dfrac{d}{dx}\,{}_2F_1(a,b;c;\mathrm{x})+(1-\mathrm{c})\ _2F_1(a,b;c;\mathrm{x})$

$=a\ _2F_1(a+1,b;c;\mathrm{x})+(1-\mathrm{c})\ _2F_1(a,b;c-1;\mathrm{x})$

(iii) $x\dfrac{d}{dx}\,{}_2F_1(a-1,b;c;\mathrm{x})=(\mathrm{a}-1)\ _2F_1(a,b;c;\mathrm{x})-(\mathrm{a}-1)\ _2F_1(a-1,b;c;\mathrm{x})$

٤. اذا كان $n=0,1,2,3,\ldots$ فأثبت ان

(i) $_2F_1(-n,\mathrm{a}+\mathrm{n};c;1)=(-1)^{n}\dfrac{(1+\mathrm{a}-\mathrm{c})_{n}}{(\mathrm{c})_{n}}$