الباب الرابع

القطوع المخروطية Conic Sections

القطوع المخروطية تستمد اسمها من حيث إنها تنشأ من تقاطع مستوى ما مع مخروط دائري قائم بحيث لا يمر المستوى برأس المخروط.

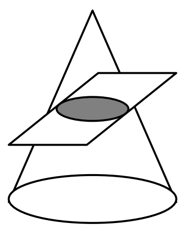
ومنحنى التقاطع هذا يكون له أربعة حالات كما يلي:

1 – إذا كان المستوى القاطع عمودياً على محور المخروط فإن المقطع الحادث يكون دائرة.

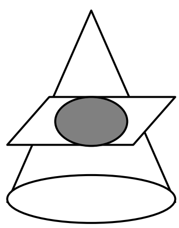
2 – إذا كان المستوى القاطع مائلا على محور المخروط ولا يوازي أي راسم من رواسم المخروط فإن المقطع الحادث يكون قطعاً ناقصاً.

3 – إذا كان المستوى القاطع مائلا على محور المخروط ويوازي أحد رواسم المخروط فإن المقطع الحادث يكون قطعاً مكافئاً.

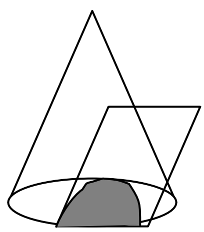
4 – إذا كان المستوى القاطع يوازي راسمين من رواسم المخروط (أي يوازي محور المخروط) فإن المقطع الحادث يكون قطعاً زائداً.



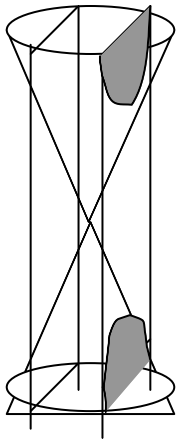
قطع ناقص



دائرة

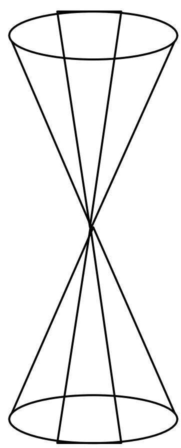


قطع مكافئ

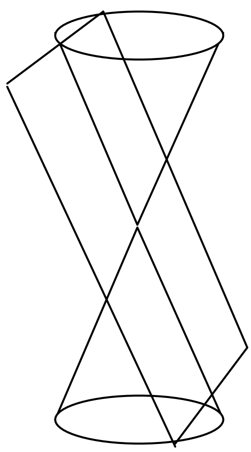


قطع زائد

أما إذا كان المستوى القاطع يمر برأس المخروط ولا يوازي أي راسم من رواسم المخروط فإننا نحصل على نقطة ، وإذا كان المستوى القاطع يمر برأس المخروط ويوازي أحد رواسم المخروط فإننا نحصل على خطين مستقيمين منطبقين ، وإذا كان المستوى القاطع يمر برأس المخروط ويوازي راسمين من رواسم المخروط فإننا نحصل على خطين مستقيمين متقاطعين.



نقطة ومستقيمان متقاطعان



مستقيمان منطبقان

▪ **التعريف الرياضي للقطع المخروطي:**

القطع المخروطي هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك فى المستوى بحيث أن النسبة بين بعدها عن نقطة ثابتة فى المستوي وبعدها عن مستقيم ثابت فى المستوى تكون دائما مقدار ثابت.

وتُسمى النقطة الثابتة **بؤرة القطع** Focus ،

ويُسمى المستقيم الثابت **دليل القطع** Directory ،

وتُسمى النسبة الثابتة **الاختلاف المركزي** Eccentricity ويُرمز له بالرمز **e** ،

ويُسمى الخط المستقيم المار بالبؤرة والعمودي على الدليل **محور القطع** ،

ويُسمى المستقيم المار بالبؤرة والعمودي على محور القطع **الوتر البؤري العمودي** .

- إذا كانت $e \to \infty$ فإن المحل الهندسي يمثل خطين مستقيمين.
- إذا كانت $e = 0$ فإن المحل الهندسي يمثل دائرة.
- إذا كانت $e = 1$ فإن المحل الهندسي يمثل قطع مكافئ.
- إذا كانت $e < 1$ فإن المحل الهندسي يمثل قطع ناقص.
- إذا كانت $e > 1$ فإن المحل الهندسي يمثل قطع زائد.

ونلاحظ أن الدائرة هي حالة خاصة من القطع الناقص ، وأن الخطين المستقيمين حالة خاصة من القطع الزائد.

أولاً: القطع المكافئ The Parabola

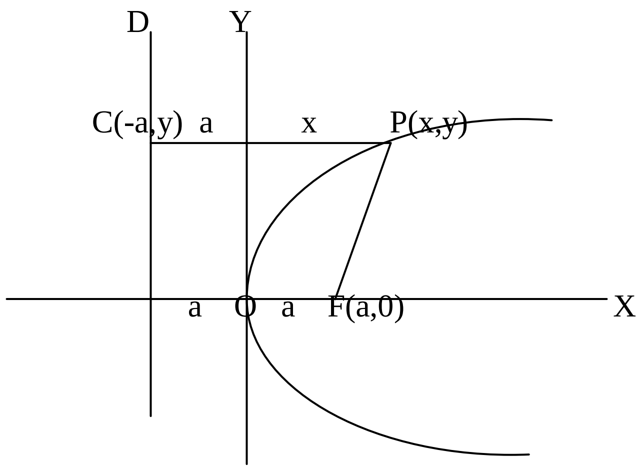
تعريف: القطع المكافئ هو فئة جميع النقط في المستوى والتي تكون على بعدين متساويين من نقطة ثابتة F (البؤرة) ومستقيم ثابت D (الدليل).

والمستقيم الذي يمر بالبؤرة ويكون عمودي على الدليل هو محور القطع المكافئ ، ونقطة تقاطع القطع المكافئ مع محوره هي رأس القطع المكافئ والتي تكون في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل ، والقطع المكافئ يكون متماثل حول محوره.

وللقطع المكافئ خصائص هندسية كثيرة وله تطبيقات عملية كثيرة منها التقوسات المكافئة والتي تُستخدم كدعامات رئيسية للكباري المعلقة ، ومسارات القذائف من الناحية الهندسية تمثل قطوع مكافئة حقيقية إذا لم توجد مقاومة هواء.

ونستنتج المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره هو المحور السيني OX كما يلي:

نفرض أن المسافة بين رأس القطع والدليل D هي a ونفرض أن إحداثيات البؤرة هي $(a,0)$ كما بالشكل:



وطبقاً للتعريف يكون:

$$\overline{PF} = \overline{PC} \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x + a.$$

$$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-0)^2 = (x+a)^2.$$

$$\therefore x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

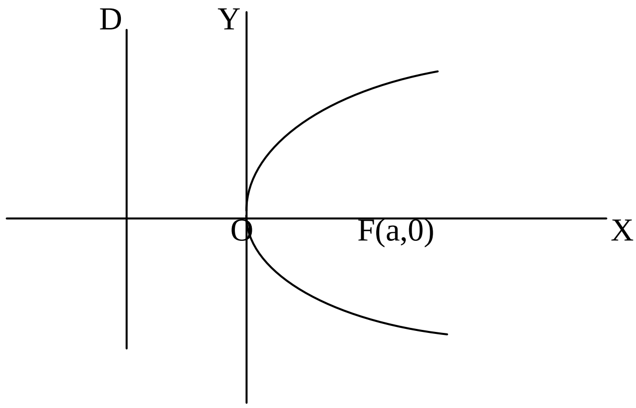
$$\therefore y^2 = 4ax.$$

وإذاً المعادلة $y^2 = 4ax$ هي المعادلة القياسـ ـية للقطع المكافئ الذي رأسـ ـه نقطة الأصل $(0,0)$ ، وبؤرته النقطة $F(a,0)$ ، ودليله المستقيم $x = -a$ ،

وطول وتره البؤري العمودي يساوي $|4a|$.

وللقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل أربعة مواضع كما يلي :

1- القطع المكافئ في الوضع الأفقي وفتحته ناحية اليمين كما بالشكل:

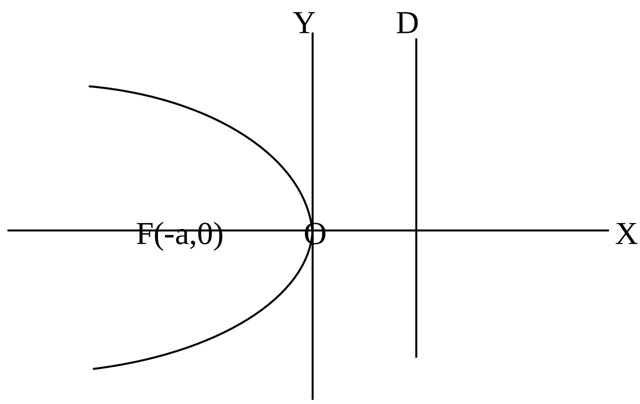


فتكون صفات القطع كما يلي:

محور القطع هو المحور السيني OX ، ومعادلة القطع على الصورة $y^2 = 4ax$

وبؤرته $(a,0)$ ودليله $x = -a$ ، وطول وتره البؤري العمودي يساوي $|4a|$.

2- القطع المكافئ في الوضع الأفقي وفتحته ناحية اليسار كما بالشكل:

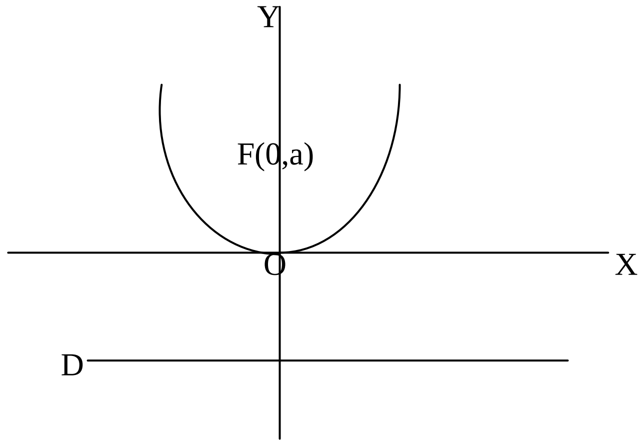


فتكون صفات القطع كما يلي:

محور القطع هو المحور السيني OX ، ومعادلة القطع على الصورة $y^2 = 4a(-x)$

أي تكون $y^2 = -4ax$ وبؤرته $(-a,0)$ ودليله $x = a$ وطول وتره البؤري العمودي يساوي $|4a|$.

3- القطع المكافئ في الوضع الرأسي وفتحته لأعلى كما بالشكل:

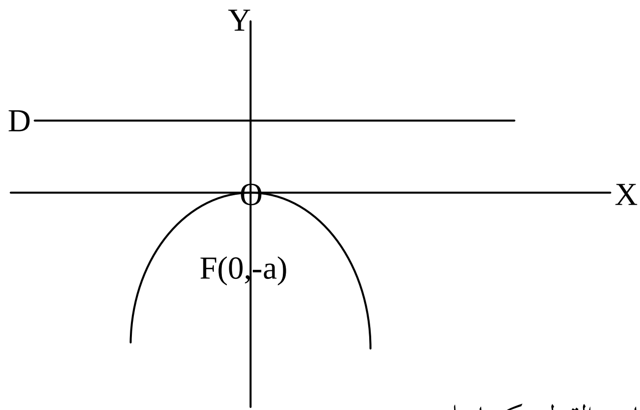


<u>فتكون صفات القطع كما يلي:</u>

محور القطع هو المحور الصادي OY ، ومعادلة القطع على الصورة $x^2 = 4ay$

وبؤرته $(0, a)$ ودليله $y = -a$ ، وطول وتره البؤري العمودي يساوي $|4a|$.

4- القطع المكافئ في الوضع الرأسي وفتحته لأسفل كما بالشكل:



<u>فتكون صفات القطع كما يلي:</u>

محور القطع هو المحور الصادي OY ، ومعادلة القطع على الصورة $x^2 = 4a(-y)$

أي تكون $x^2 = -4ay$ وبؤرته $(0,-a)$ ودليله $y = a$ وطول وتره البؤري العمودي يساوي $|4a|$.

▪ معادلة المماس للقطع المكافئ:

لتكن معادلة القطع المكافئ هي $y^2 = 4ax$ ، ولتكن (x_1, y_1) نقطة ما واقعة على القطع فهي تحقق معادلته ومن ثم يكون $y_1{}^2 = 4ax_1$.

وميل المماس للقطع عند النقطة (x_1, y_1) نحصل عليه كما يلي:

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}.$$

وإذاً ميل المماس للقطع عند النقطة (x_1, y_1) يكون هو $\frac{2a}{y_1}$.

ومعادلة المماس للقطع عند النقطة (x_1, y_1) تكون هي $(y - y_1) = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$

$$\therefore yy_1 - y_1{}^2 = 2ax - 2ax_1.$$

وبالتعويض عن $y_1{}^2 = 4ax_1$ نحصل على: $yy_1 - 4ax_1 = 2ax - 2ax_1$

$$\therefore yy_1 = 2a(x + x_1).$$

وهذه هي معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ عند النقطة النقطة (x_1, y_1) .

وشرط تماس المستقيم $y = mx + c$ (حيث m ميل المستقيم، c طول الجزء المقطوع من محور الصادات) للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ هو $c = \frac{a}{m}$ واحداثيات نقطة التماس تكون $(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m})$.

▪ **المعادلة القطبية للقطع المكافئ:**

المعادلة القطبية للقطع المخروطي مُسـ ندة إلى البؤرة كقطب ومحور القطع كخط إبتدائي تكون على الصورة:

$$\frac{L}{r}=1-e\cos\theta. \qquad (*)$$

حيث r البعد بين البؤرة ونقطة على القطع ، L نصف طول الوتر البؤري العمودي للقطع ، e الاختلاف المركزي ، θ الزاوية التي يصنعها المستقيم الواصل بين البؤرة ونقطة على القطع.

ومن تعريف القطع المكافئ يكون $e=1\,,\,L=2a$ وبالتعويض في المعادلة (*) تصبح:

$$\frac{2a}{r}=1-\cos\theta=1-(1-2\sin^2\frac{\theta}{2})=2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

$$\therefore r=a\,\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}.$$

وهذه هي المعادلة المعادلة القطبية للقطع المكافئ $y^2=4ax$.

أمثلة:

1- أوجد إحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $y^2 = 8x$

ثم أوجد معادلة المماس له عند النقطة $(1,2)$.

الحل: معادلة القطع المكافئ المعطاه على الصـ ـورة القياسـ ـية $y^2 = 4ax$

وبالمقارنة يكون $4a = 8$ وإذاً $a = 2$.

وعلى ذلك تكون إحداثيات البؤرة $(a,0) = (2,0)$.

ومعادلة الدليل تكون $x = -2$.

ومعادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ عند النقطة (x_1, y_1)

تكون $yy_1 = 2a(x + x_1)$

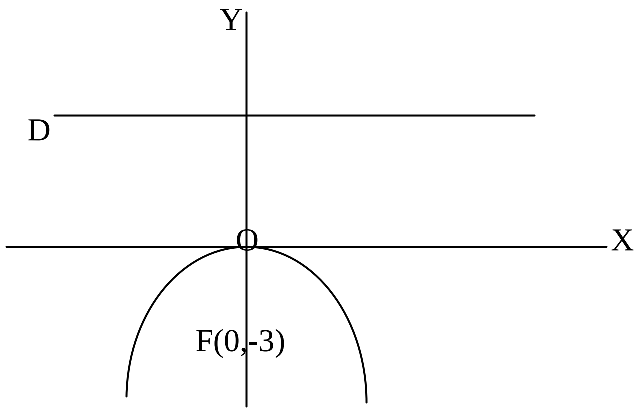
وعلى ذلك تكون معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 8x$ عند النقطة $(1,2)$

تكون $2y = 4(x+1)$.

2- أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته النقطة $(0,-3)$

ثم أوجد معادلة دليله وطول وتره البؤري العمودي.

الحل: القطع يكون كما بالشكل:



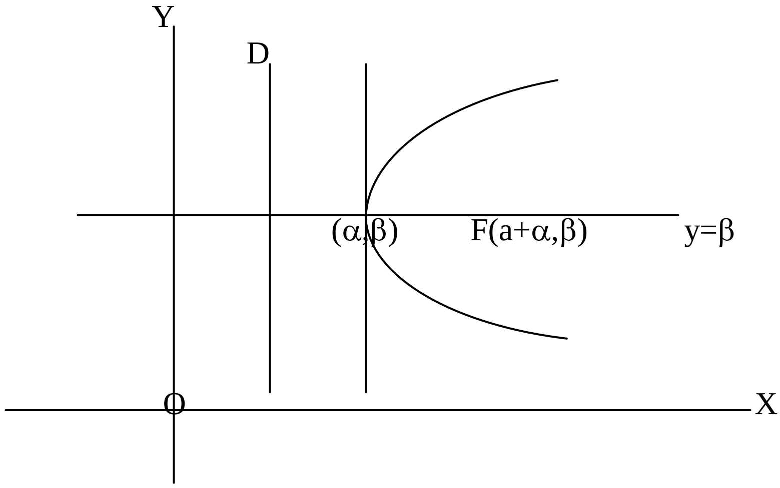
وعلى ذلك تكون معادلة القطع على الصورة $x^2 = -4ay$ وبؤرته $(0,-3) = (0,-a)$

وإذاً $a = 3$ ومعادلة القطع تكون $x^2 = -12y$ ومعادلة دليله تكون $y = 3$

وطول وتره البؤري العمودي يساوي $4a = 12$.

- **المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي أحد محوري الإحداثيات:**

أولاً: إذا كان محور القطع يوازي محور السينات OX وكانت رأسه النقطة (α,β) كما بالشكل:



فإن الصورة القياسية لمعادلة القطع تكون:

$$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha).$$

وبؤرته النقطة $(a+\alpha,\beta)$

ودليله المستقيم $x=-a+\alpha$

ومعادلة محوره تكون $y=\beta$

✓ وعندما تكون معادلة القطع على الصورة $(y-\beta)^2 = -4a(x-\alpha)$

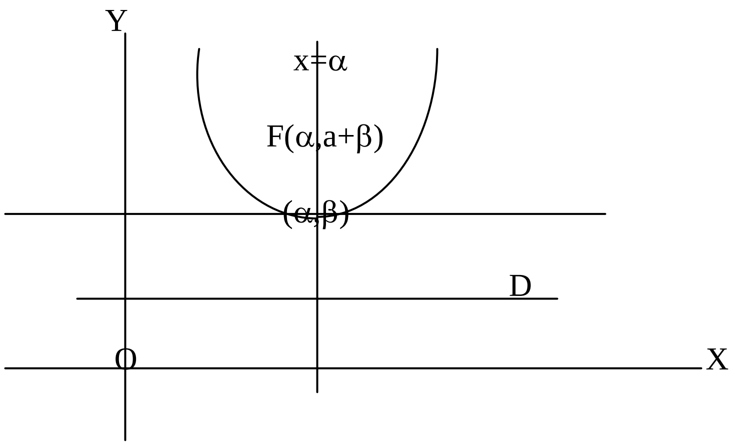
فإن فتحة القطع تكون ناحية اليسار.

وبؤرته النقطة $(-a+\alpha,\beta)$

ودليله المستقيم $x=a+\alpha$

ومعادلة محوره تكون $y=\beta$

ثانياً: إذا كان محور القطع يوازي محور الصادات OY وكانت رأسه النقطة (α,β) كما بالشكل:



فإن الصورة القياسية لمعادلة القطع تكون:

$$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta).$$

وبؤرته النقطة $(\alpha, a+\beta)$

ودليله المستقيم $y=-a+\beta$

ومعادلة محوره تكون $x=\alpha$

✓ وعندما تكون معادلة القطع على الصورة $(x-\alpha)^2 = -4a(y-\beta)$

فإن فتحة القطع تكون لأسفل.

وبؤرته النقطة $(\alpha, -a+\beta)$

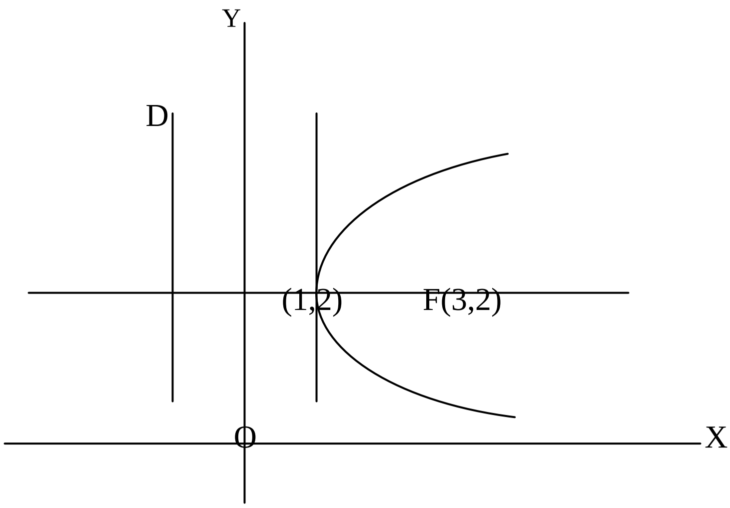
ودليله المستقيم $y=a+\beta$

ومعادلة محوره تكون $x=\alpha$

أمثلة:

1- أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة $(1,2)$ وبؤرته النقطة $(3,2)$ ثم أوجد معادلة دليله.

الحل: القطع يكون كما بالرسم:



وإذاً معادلة القطع تكون على الصورة القياسية $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$

وبالتعويض من المعطيات عن $(a+\alpha,\beta)=(3,2)$, $(\alpha,\beta)=(1,2)$ يكون $a=2$.

ومن ثم تكون معادلة القطع المطلوبه هي $(y-2)^2 = 8(x-1)$

ومعادلة دليله تكون $x=-a+\alpha=-2+1=-1$.

2- اذكر صفات القطع المكافئ المُمثَل بالمعادلة $y^2-4y-8x+12=0$.

الحل: نضع معادلة القطع المعطاه على الصورة القياسية كما يلي:

$$y^2-4y=8x-12 \Rightarrow (y-2)^2-4=8x-12$$
$$\Rightarrow (y-2)^2=8(x-1).$$

$$\therefore (y-2)^2=4(2)(x-1).$$

وهذه المعادلة تناظر الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الأفقي:

$$(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)\,.$$
$$\therefore \alpha=1, \beta=2, a=2.$$

وإذاً محور القطع يوازي محور OX وفتحته تكون ناحية اليمين .

ورأس القطع تكون $(\alpha,\beta)=(1,2)$.

وبؤرة القطع تكون $(a+\alpha,\beta)=(3,2)$.

ومعادلة دليله تكون $x=-a+\alpha=-1$.

ومعادلة محوره تكون $y=\beta=2$.

3– اذكر صفات القطع المكافئ المُمثَل بالمعادلة $x^2-8x+2y+7=0$.

<u>الحل</u>: نضع معادلة القطع المعطاه على الصورة القياسية كما يلي:

$$x^2-8x=-2y-7 \Rightarrow (x-4)^2-16=-2y-7$$
$$\Rightarrow (x-4)^2=-2y+9$$
$$\Rightarrow (x-4)^2=-2(y-\frac{9}{2}).$$
$$\therefore (x-4)^2=4(-\frac{1}{2})(y-\frac{9}{2}).$$

وهذه المعادلة تناظر الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الرأسي:

$$(x-\alpha)^2=4a(y-\beta).$$
$$\therefore \alpha=4, \beta=\frac{9}{2}, a=-\frac{1}{2}.$$

وإذاً محور القطع يوازي محور OY وفتحته تكون لأسفل .

ورأس القطع تكون $(\alpha,\beta)=(4,\frac{9}{2})$.

وبؤرة القطع تكون $(\alpha,a+\beta)=(4,4)$.

ومعادلة دليله تكون $y=-a+\beta=5$.

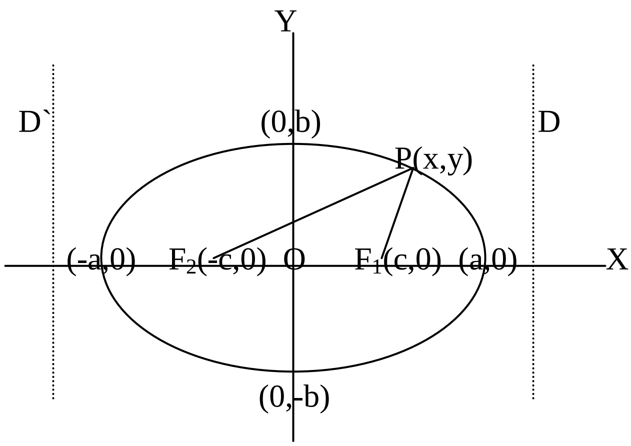
ومعادلة محوره تكون $x=\alpha=4$.

ثانياً: **القطع الناقص** An Ellipse

تعريف: القطع الناقص هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى (تسميان بؤرتى القطع الناقص) يساوي مقدار ثابت $2a$ (وهو طول محورة الأكبر).

ونستنتج المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات OX ومحوره الأصغر منطبق على محور الصادات OY كما يلي:

لتكن بؤرتا القطع الناقص هما النقطتان $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ حيث c بُعد كلاً من البؤرتين عن مركز القطع ، ونهايتى محوره الأكبر هما النقطتين $(a,0),(-a,0)$ ونهايتى محوره الأصغر هما النقطتين $(0,b),(0,-b)$ ولتكن $P(x,y)$ نقطة في المستوى تقع على القطع كما بالشكل:



ومن تعريف القطع الناقص يكون:

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a.$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

$$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2.$$

$$\Rightarrow -4cx=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

$$\Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx.$$

وبتربيع الطرفين:

$$\Rightarrow a^2[(x+c)^2+y^2]=(a^2+cx)^2.$$

$$\Rightarrow a^2[x^2+2cx+c^2+y^2]=a^4+2a^2cx+c^2x^2.$$

$$\Rightarrow a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2.$$

$$\Rightarrow x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$ (بالقسمة على $a^2(a^2-c^2)$)

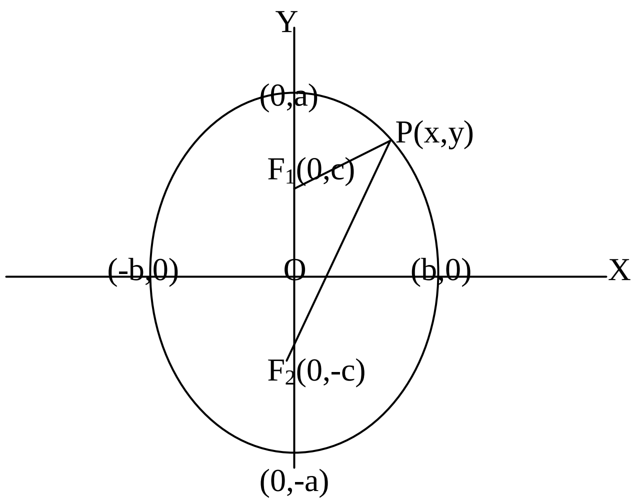
وبوضع $c^2=(a^2-b^2)$ فيكون $a^2-c^2=b^2$:

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (*)$$

وهذه هي المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ، ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات OX ومحوره الأصغر منطبق على محور الصادات OY. وإحداثيات بؤرتيه $(c,0),(-c,0)$ حيث $c=\sqrt{a^2-b^2}$ وطول محوره الأكبر يساوي $2a$ وطول محوره الأصغر يساوي $2b$ وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\frac{2b^2}{a}$ والاختلاف المركزي له $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}<1$.

ومعادلتا دليليه $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$ ومساحة القطع الناقص تساوي πab .

✓ وإذا كان المحور الأكبر للقطع الناقص منطبق على محور الصادات OY ومحوره الأصغر منطبق على محور السينات OX كما بالشكل:



وإحداثيات بؤرتيه $(0,c),(0,-c)$ حيث $c=\sqrt{a^2-b^2}$

فإن معادلته تكون على الصورة:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1. \qquad (**)$$

■ <u>المماس والعمودي للقطع الناقص</u> $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ عند النقطة (x_1,y_1) :

معادلة المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ عند النقطة (x_1,y_1) تكون:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

ومعادلة العمودي على القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ عند النقطة (x_1,y_1) تكون:

$$\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}.$$

وشرط تماس المستقيم $y=mx+c$

(حيث m ميل المستقيم، c طول الجزء المقطوع من محور الصادات)

للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هو $c^2=a^2m^2+b^2$.

■ **<u>الدائرة المساعدة للقطع الناقص</u>** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

هي الدائرة التي مركزها هو مركز القطع الناقص ونصف قطرها يساوي نصف طول المحور الأكبر للقطع الناقص (أي يساوي a) ومن ثم تكون معادلة الدائرة المساعدة للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هي $x^2+y^2=a^2$.

■ **<u>المعادلة القطبية للقطع الناقص</u>** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

إذا كانت $P(r,\theta)$ نقطة على القطع الناقص فإن $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

وبالتعويض عن x,y في معادلة القطع $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ نحصل على:

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1\Rightarrow\frac{1}{a^2}\cos^2\theta+\frac{1}{b^2}\sin^2\theta=\frac{1}{r^2}.$$

وهذه هي المعادلة القطبية للقطع الناقص .

أمثلة:

1- أوجد معادلة القطع الناقص الذي طول محوريه 10,8 ومركزه نقطة الأصل ، وعيّن بؤرتيه.

(أ) إذا كان محوره الأكبر منطبق على محور السينات OX .

(ب) إذا كان محوره الأكبر منطبق على محور الصادات OY .

الحل: من المعطيات طول المحور الأكبر $2a=10$ وطول المحور الأصغر $2b=8$

$$\therefore a=5, b=4, c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3.$$

(أ) معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات تكون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ وبؤرتيه $(c,0),(-c,0)$.

وإذاً المعادلة المطلوبه تكون $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ وبؤرتيه $(3,0),(-3,0)$.

(ب) معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره الأكبر منطبق على محور الصادات تكون $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ وبؤرتيه $(0,c),(0,-c)$.

وإذاً المعادلة المطلوبه تكون $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$ وبؤرتيه $(0,3),(0,-3)$.

2- عيّن البؤرتين وطول محوري القطع الناقص المُمثل بالمعادلة $9x^2+25y^2=225$
ثم أوجد معادلة كلاً من المماس والعمودي له عند النقطة $(5,-3)$.

الحل: نضع معادلة القطع المعطاه على الصورة القياسية كما يلي:

$$9x^2+25y^2=225 \Rightarrow \frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

وإذاً معادلة القطع المعطاه تكون على الصورة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ومن ثم يكون محور القطع الأكبر منطبق على محور السينات ومحوره الأصغر منطبق على محور الصادات ومركز القطع هو نقطة الأصل ويكون:

$$a^2=25 \Rightarrow a=5, b^2=9 \Rightarrow b=3, c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4.$$

وإذاً بؤرتا القطع هما $(4,0),(-4,0)$ وطول محوريه $2a=10\,, 2b=6$.

ومعادلة المماس للقطع عند النقطة $(5,-3)$ تكون:

$$\frac{5x}{25}-\frac{3y}{9}=1.$$

أي تكون $3x-5y-15=0$

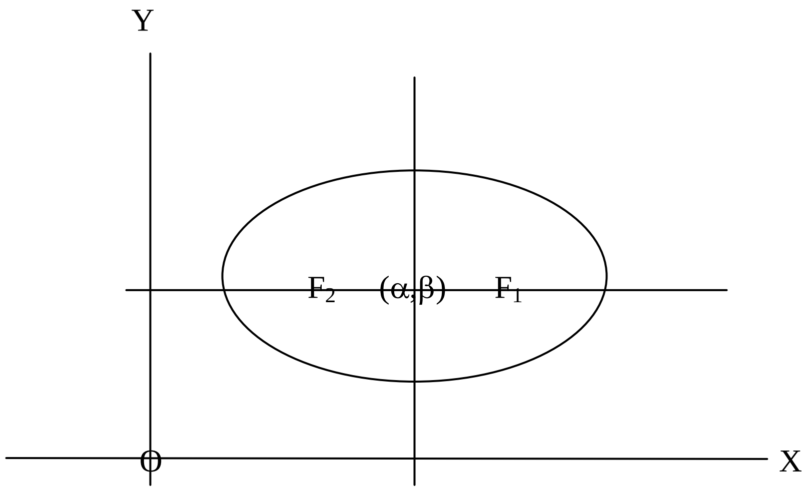
ومعادلة العمودي على القطع عند النقطة $(5,-3)$ تكون:

$$\frac{x-5}{\frac{5}{25}}=\frac{y+3}{\frac{-3}{9}}.$$

أي تكون $5x+3y-16=0$.

▪ **المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه النقطة** (α,β) **ومحوراه يوازيان محوري الإحداثيات**:

أولاً: إذا كان المحور الأكبر للقطع يوازي محور السينات OX كما بالشكل:



فإن معادلة القطع الناقص تكون على الصورة القياسية:

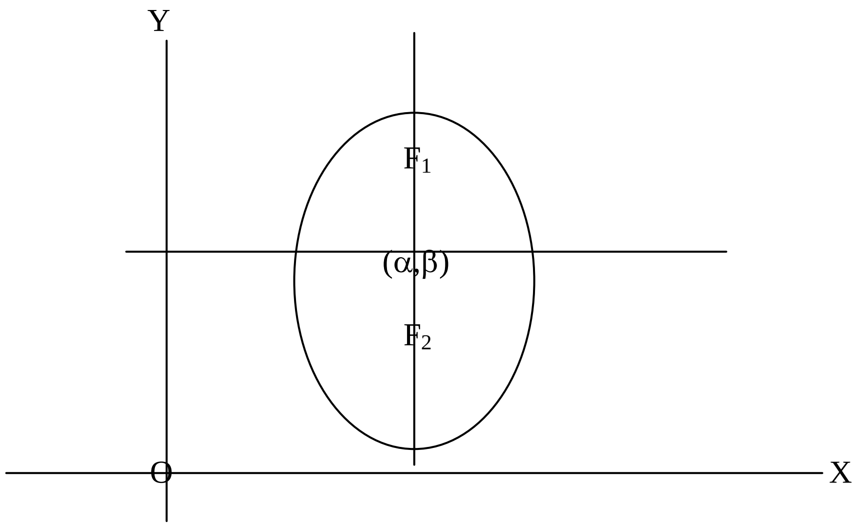
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1.$$

وإحداثيات بؤرتيه تكون $(c+\alpha,\beta),(-c+\alpha,\beta)$.

ونهايتي محوره الأكبر النقطتان $(a+\alpha,\beta),(-a+\alpha,\beta)$.

ونهايتي محوره الأصغر النقطتان $(\alpha,b+\beta),(\alpha,-b+\beta)$.

ثانياً: إذا كان المحور الأكبر للقطع يوازي محور الصادات OY كما بالشكل:



فإن معادلة القطع الناقص تكون على الصورة القياسية:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}+\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1.$$

وإحداثيات بؤرتيه تكون $(\alpha,-c+\beta),(\alpha,c+\beta)$.

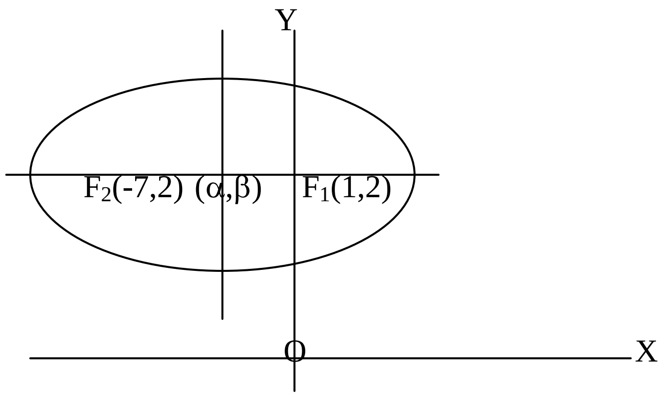
ونهايتي محوره الأكبر النقطتان $(\alpha,-a+\beta),(\alpha,a+\beta)$.

ونهايتي محوره الأصغر النقطتان $(-b+\alpha,\beta),(b+\alpha,\beta)$.

أمثلة:

1- أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(-7,2),(1,2)$ وطول محوره الأكبر الموازي لمحور السينات يساوي 10 .

الحل: شكل القطع يكون كما بالرسم:



حيث إن مركز القطع الناقص يقع عند منتصف البعد البؤري (المسافة بين البؤرتين)

$$\therefore \alpha = \frac{1+(-7)}{2} = -3 \ , \ \beta = \frac{2+2}{2} = 2 \ , \ 2a = 10 \Rightarrow a = 5.$$

وإذاً احداثيات مركز القطع تكون $(\alpha,\beta) = (-3,2)$.

ومعادلة القطع الناقص تكون على الصورة القياسية $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$.

وإحداثيات بؤرتيه تكون $(c+\alpha,\beta) = (1,2) \ , \ (-c+\alpha,\beta) = (-7,2)$.

$$\therefore c+\alpha = 1 \ , \ -c+\alpha = -7 \Rightarrow c+(-3) = 1 \ , -c+(-3) = -7 \Rightarrow c = 4.$$

$$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3.$$

وإذاً معادلة القطع المطلوبة تكون $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

2- عيّن المركز والبؤرتين ونهايتي كلاً من المحورين الأكبر والأصغر للقطع الناقص المُمثل بالمعادلة $x^2+4y^2-2x+8y+1=0$.

<u>الحل</u>: نضع المعادلة المعطاه على الصورة القياسية كما يلي:

$$x^2+4y^2-2x+8y+1=0$$
$$\Rightarrow (x^2-2x)+4(y^2+2y)+1=0$$
$$\Rightarrow (x-1)^2-1+4(y+1)^2-4+1=0$$
$$\Rightarrow (x-1)^2+4(y+1)^2=4$$
$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{1}=1.$$

وإذاً مركز القطع هو $(\alpha,\beta)=(1,-1)$ والمحور الأكبر للقطع يوازي محور السينات ،

$a^2=4\Rightarrow a=2$, $b^2=1\Rightarrow b=1$, $c^2=a^2-b^2=4-1=3\Rightarrow c=\sqrt{3}.$

وإذاً بؤرتا القطع هما $(-c+\alpha,\beta)=(1-\sqrt{3},-1)$, $(c+\alpha,\beta)=(1+\sqrt{3},-1)$.

ونهايتي محوره الأكبر هما $(-a+\alpha,\beta)=(-1,-1)$, $(a+\alpha,\beta)=(3,-1)$.

ونهايتي محوره الأصغر هما $(\alpha,-b+\beta)=(1,-2)$, $(\alpha,b+\beta)=(1,0)$.

ثالثاً: القطع الزائد The Hyperbola

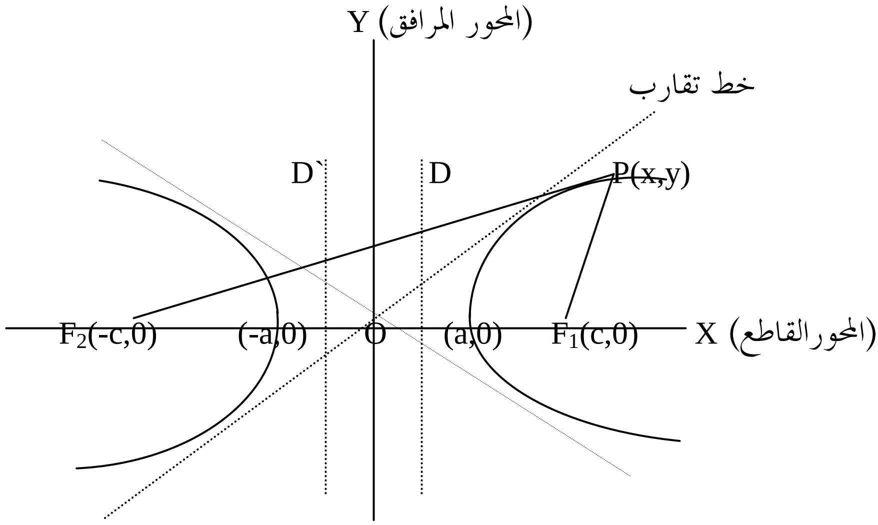
تعريف: القطع الزائد هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى (تسميان بؤرتي القطع الزائد) مقدار ثابت $2a$ (يساوي طول المحور القاطع للقطع الزائد).

ونستنتج المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل والمحور القاطع له هو محور السينات OX والمحورالمرافق له هو محور الصادات OY كما يلي:

لتكن بؤرتا القطع الزائد هما النقطتان $F_1(c,0), F_2(-c,0)$

حيث c بُعد كلاً من البؤرتين عن مركز القطع ، ورأسيه هما النقطتين $(a,0),(-a,0)$

ولتكن $P(x,y)$ نقطة في المستوى تقع على القطع كما بالشكل:



ومن تعريف القطع الزائد يكون:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

وبالاختصار كما فعلنا في استنتاج المعادلة القياسية للقطع الناقص نحصل على:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

وبوضع $c^2 = (a^2 + b^2)$ يكون $a^2 - c^2 = -b^2$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (*)$$

وهذه هي الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ، والمحور القاطع له هو محور السـينات OX والمحور المرافق له هو محور الصـادات OY .

وبؤرتيه $(c,0),(-c,0)$ حيث $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ورأسيه $(a,0),(-a,0)$

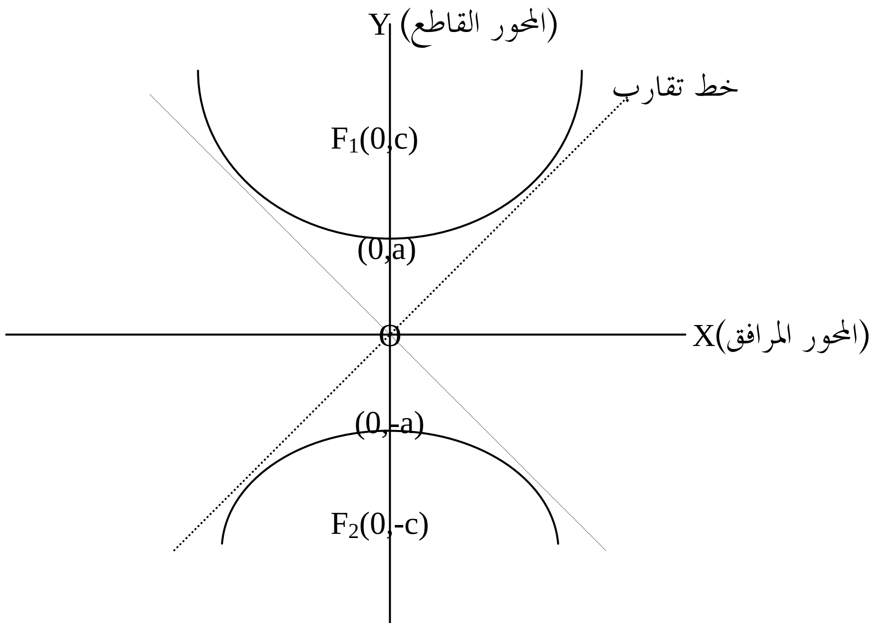
والاختلاف المركزي له $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1$ ومعادلتا دليليه $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}$.

ومعادلة خطيه التقاربيين (وهما الخطان اللذان يمسـان القطع الزائد في اللانهاية) تكون $y=\pm\frac{b}{a}x$ والمعادلة المشتركة لهما تكون $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

✓ وإذا كان المحور القاطع للقطع الزائد هو محور الصادات OY والمحور المرافق له هو محور السينات OX فإن الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

وبؤرتيه $(0,c),(0,-c)$ ورأسيه $(0,a),(0,-a)$ ومعادلة خطيه التقاربيين $y=\pm\frac{a}{b}x$

كما بالشكل التالي:



ويُسمى هذا القطع بالقطع الزائد المرافق للقطع $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

ويمكن كتابة معادلته على الصورة $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$ ويُسمى هذا القطع بالقطع الزائد المرافق ويمكن كتابة معادلته على الصورة $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1$.

▪ **القطع الزائد القائم:**

إذا تساوى طول المحور القاطع بطول المحور المرافق فإن القطع الزائد يُسمى بالقطع الزائد القائم وتصبح معادلته في الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1.$$

والاختلاف المركزي له $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2}}=\sqrt{2}>1$.

▪ **المماس والعمودي للقطع الزائد** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **عند النقطة** (x_1,y_1) :

معادلة المماس للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ عند النقطة (x_1,y_1) تكون:

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

ومعادلة العمودي على القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ عند النقطة (x_1,y_1) تكون:

$$\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}-\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=0.$$

وشرط تماس المستقيم $y=mx+c$ (حيث m ميل المستقيم، c طول الجزء المقطوع من محور الصادات) للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هو $c^2=a^2m^2-b^2$.

▪ **المعادلة القطبية للقطع الزائد** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$:

إذا كانت $P(r,\theta)$ نقطة على القطع الزائد فإن $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

وبالتعويض عن x,y في معادلة القطع $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نحصل على:

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}-\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1\Rightarrow\frac{1}{a^2}\cos^2\theta-\frac{1}{b^2}\sin^2\theta=\frac{1}{r^2}.$$

وهذه هي المعادلة القطبية للقطع الزائد.

▪ **أمثلة:**

1- أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه النقطتين $(-5,0),(5,0)$

ومركزه نقطة الأصل وطول محوره القاطع 8 .

الحل: من المعطيات واضح أن المحور القاطع للقطع هو محور السينات ،

والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع هو

محور السينات تكون $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ومن المعطيات:

$$2a=8\Rightarrow a=4\ ,\ F_1(c,0)=(5,0)\ ,\ F_2(-c,0)=(-5,0)\Rightarrow c=5,$$
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}\Rightarrow b=\sqrt{25-16}=3.$$

وإذاً معادلة القطع الزائد المطلوبة تكون $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

2- عيّن بؤرتي القطع الزائد المُمثل بالمعادلة $4y^2-25x^2=100$

ثم أوجد معادلة معادلة خطيه التقاربيين ، ومعادلة كلاً من المماس والعمودي له

عند النقطة $(4,-5)$.

الحل: نضع معادلة القطع المعطاه على الصورة القياسية كما يلي:

$$4y^2-25x^2=100\Rightarrow\frac{4y^2}{100}-\frac{25x^2}{100}=1\Rightarrow\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1.$$

وإذاً معادلة القطع المعطاه تكون على الصورة القياسية $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ومن ثم يكون

المحور القاطع للقطع هو محور الصادات ومركز القطع هو نقطة الأصل ويكون:

$$a^2=25\Rightarrow a=5,\ b^2=4\Rightarrow b=2,\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}.$$

وإذاً بؤرتا القطع هما $(0,-c)=(0,-\sqrt{29})$, $(0,c)=(0,\sqrt{29})$.

وخطيه التقاربيين يكونا $y=\pm\frac{a}{b}x$ أي يكونا $y=\pm\frac{5}{2}x$ ، ومعادلة المماس للقطع عند النقطة $(4,-5)$ تكون $\frac{-5y}{25}-\frac{4x}{4}=1$ أي تكون $y+5x+5=0$

ومعادلة العمودي على القطع عند نفس النقطة تكون $\frac{y+5}{\frac{-5}{25}}-\frac{x-4}{\frac{4}{4}}=0$

أي تكون $5y+x+21=0$.

▪ **معادلة القطع الزائد الذي محوره القاطع يوازي أحد محوري الإحداثيات ومركزه النقطة** (α,β) :

أولاً: إذا كان المحور القاطع للقطع يوازي محور السينات OX :

فإن الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1.$$

وتكون بؤرتى القطع هما $(c+\alpha,\beta),\ (-c+\alpha,\beta)$.

وتكون رأسى القطع هما $(a+\alpha,\beta),\ (-a+\alpha,\beta)$.

وخطيه التقاربيين هما $y+\beta=\pm\frac{b}{a}(x+\alpha)$.

ومعادلة محوره القاطع تكون $y=\beta$ ومعادلة محوره المرافق تكون $x=\alpha$.

ثانياً: إذا كان المحور القاطع للقطع يوازي محور الصادات OY :

فإن الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد تكون:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1.$$

وتكون بؤرتى القطع هما $(\alpha,c+\beta),\ (\alpha,-c+\beta)$.

وتكون رأسى القطع هما $(\alpha,a+\beta),\ (\alpha,-a+\beta)$.

وخطيه التقاربيين هما $y+\beta=\pm\frac{a}{b}(x+\alpha)$.

ومعادلة محوره القاطع تكون $x=\alpha$ ومعادلة محوره المرافق تكون $y=\beta$.

▪ **أمثلة:**

1- أوجد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره القاطع (محور السينات) يساوي 14 وإحداثيات بؤرتيه $(7,2),(-9,2)$.

الحل: نفرض أن مركز القطع هو النقطة (α,β) والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي محوره القاطع يوازي محور السينات ومركزه النقطة (α,β) تكون:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

$$\because 2a=14 \;\therefore a=7,$$

$$(c+\alpha,\beta)=(7,2)\;,\;(-c+\alpha,\beta)=(-9,2)\Rightarrow \alpha=-1\;,\;c=8\;,\;\beta=2,$$

$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}\Rightarrow b=\sqrt{64-49}=\sqrt{15}.$$

وإذاً معادلة القطع الزائد المطلوبة تكون $\frac{(x+1)^2}{49}-\frac{(y-2)^2}{15}=1$.

2- بيّن أن المعادلة $x^2-4y^2+2x+8y-7=0$ تمثل قطع زائد واذكر صفاته.

الحل: نضع المعادلة المعطاه على الصورة القياسية كما يلي:

$$x^2-4y^2+2x+8y-7=0\Rightarrow (x^2+2x)-4(y^2-2y)-7=0.$$
$$\Rightarrow (x+1)^2-1-4(y-1)^2+4-7=0.$$
$$\Rightarrow (x+1)^2-4(y-1)^2=4.$$
$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{1}=1.$$

وإذاً المعادلة المعطاه تمثل قطع زائد على الصورة القياسية $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

صفاته كما يلي:

$$a^2=4\Rightarrow a=2, b^2=1, c^2=a^2+b^2=5\Rightarrow c=\sqrt{5}$$

طول محوره القاطع وهو محور السينات يساوي $2a=4$.

وطول محوره المرافق وهو محور الصادات يساوي $2b=1$.

ومركزه النقطة $(\alpha,\beta)=(-1,1)$ وبؤرتيه $(c+\alpha,\beta)=(\sqrt{5}-1,1),\,(-\sqrt{5}-1,1)$

ورأسيه $(a+\alpha,\beta)=(1,1),\,(-a+\alpha,\beta)=(-3,1)$.

وخطيه التقاربيين $y+1=\pm\frac{1}{2}(x-1)$.

▪ معادلة الدرجة الثانية والقطوع المخروطية في المستوى:

معادلة الدرجة الثانية في المستوى والتي على الصورة القياسية الآتية:

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$$

ومميزها $\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$.

(1) تمثل قطع مكافئ إذا كان: $\Delta\neq 0\ ,\ h^2-ab=0$.

(2) تمثل قطع ناقص إذا كان: $\Delta\neq 0\ ,\ h^2-ab<0$.

(3) تمثل قطع زائد إذا كان: $\Delta\neq 0\ ,\ h^2-ab>0$.

أمثلة:

1− حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كلاً من المعادلات الآتية (ثم اذكر صفاته):

$(i)\ x^2+8x+2y-10=0.$

$(ii)\ x^2+4y^2-2x+4y=0.$

$(iii)\ 3x^2-2y^2-12x+8y+9=0.$

الحل:

(i) مميز المعادلة $x^2+8x+2y-10=0$ هو:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -10 \end{vmatrix}=-1(1-0)=-1\neq 0.$$

$$h^2=0\ ,\ ab=0\quad \therefore h^2-ab=0.$$

وإذاً المعادلة المعطاة تمثل قطع مكافئ.

ولوصف القطع نضع معادلته على الصورة القياسية كما يلي:

$$x^2+8x+2y-10=0\Rightarrow (x+4)^2-16+2y-10=0$$
$$\Rightarrow (x+4)^2+2(y-13)=0$$
$$\Rightarrow (x+4)^2=-2(y-13).$$

وهذه المعادلة تناظر الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الرأسي:

$$(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta).$$

وعلى ذلك تكون صفات القطع كما يلي:

$$\therefore \alpha=-4, \beta=13, a=\frac{1}{2}.$$

وإذاً محور القطع يوازي محور OY وفتحته تكون لأسفل .

ورأس القطع تكون $(\alpha,\beta)=(-4,13)$.

وبؤرة القطع تكون $(\alpha,-a+\beta)=(-4,\frac{25}{2})$.

ومعادلة دليله تكون $y=a+\beta=\frac{27}{2}$.

ومعادلة محوره تكون $x=\alpha=-4$.

(ii) مميز المعادلة $x^2+4y^2-2x+4y=0$ هو:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=1(-4)-1(4)=-8\neq 0.$$

$h^2=0$, $ab=4$ $\therefore h^2-ab=-4<0.$

وإذاً المعادلة المعطاة تمثل قطع ناقص.

ولوصف القطع نضع معادلته على الصورة القياسية كما يلي:

$$x^2+4y^2-2x+4y=0\Rightarrow(x-1)^2-1+4(y+\frac{1}{2})^2-1=0$$

$$\Rightarrow(x-1)^2+4(y+\frac{1}{2})^2=2.$$

$$\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y+\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})}=1.$$

وهذه المعادلة تناظر الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

وبوضع $x-1=x', y+\frac{1}{2}=y'$ فإن معادلة القطع تصبح في الصورة $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{2})}=1$

وعلى ذلك تكون صفات القطع كما يلي:

مركز القطع $(\alpha,\beta)=(1,-\frac{1}{2})$ والمحور الأكبر للقطع يوازي محور السينات ،

والمحور الأصغر للقطع يوازي محور الصادات.

$$a^2=2\Rightarrow a=\sqrt{2}\ ,\ b^2=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ c^2=a^2-b^2=\frac{3}{2}\Rightarrow c=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

وطول محوره الأكبر يساوي $2a=2\sqrt{2}$.

وطول محوره الأصغر يساوي $2b=2\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

(iii) مميز المعادلة $3x^2-2y^2-12x+8y+9=0$ هو:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$
$$=-54+0-48+72-0=-30\neq 0\ ,$$
$$h^2=0\ ,\ ab=-6\quad \therefore h^2-ab=0-(-6)=6>0.$$

وإذاً المعادلة المعطاة تمثل قطع زائد.

ولوصف القطع نضع معادلته على الصورة القياسية كما يلي:

$$3x^2-2y^2-12x+8y+9=0 \Rightarrow 3(x^2-4x)-2(y^2-4y)^2+9=0$$
$$\Rightarrow 3(x-2)^2-12-2(y-2)^2+8+9=0.$$
$$\Rightarrow 3(x-2)^2-2(y-2)^2=-5$$
$$\Rightarrow \frac{(y-2)^2}{(\frac{5}{2})}-\frac{(x-2)^2}{(\frac{5}{3})}=1.$$

وهذه المعادلة تناظر الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد $\dfrac{(y-\beta)^2}{a^2}-\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$

وبوضع $x-2=x', y-2=y'$ فإن معادلة القطع تصبح في الصورة $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$

وعلى ذلك تكون صفات القطع كما يلي:

مركز القطع $(\alpha,\beta)=(2,2)$ ،

$$a^2=\frac{5}{2}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{5}{2}}\ ,b^2=\frac{5}{3}\Rightarrow b=\sqrt{\frac{5}{3}}\ ,c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{25}{6}}=\frac{5}{\sqrt{6}}.$$

محوره القاطع يوازي محور الصادات طوله يساوي $2a=2\sqrt{\frac{5}{2}}$.

ومحوره المرافق يوازي محور السينات طوله يساوي $2b=2\sqrt{\frac{5}{3}}$.

2− تحقق من أن المعادلة $8x^2+4xy+5y^2=36$ تمثل قطع ناقص. ثم اذكر صفاته.

<u>الحل</u>: مميز المعادلة المعطاة هو:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{vmatrix}=-36(40-4)=-(36)^2\neq 0.$$

$$h^2=4\ ,\ ab=40\quad \therefore h^2-ab=4-40=-36<0.$$

وإذاً المعادلة المعطاة تمثل قطع ناقص.

ولوصف القطع: نضع معادلته على الصورة القياسية بجعل المعادلة المعطاه خالية من الحد xy وذلك بدوران المحاور زاوية $\theta=\frac{1}{2}\tan^{1-}(\frac{2h}{a-b})=\frac{1}{2}\tan^{1-}(\frac{4}{3})$

$$\therefore \tan 2\theta=\frac{4}{3}\Rightarrow \sin 2\theta=\frac{4}{5}\ ,\cos 2\theta=\frac{3}{5}\ ,$$

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)=\frac{1}{2}(1-\frac{3}{5})=\frac{1}{2}(\frac{2}{5})=\frac{1}{5},$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)=\frac{1}{2}(1+\frac{3}{5})=\frac{1}{2}(\frac{8}{5})=\frac{4}{5}.$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}\ ,\ \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

والعلاقة بين الإحداثيات الأصلية x,y والإحداثيات الجديدة x',y' عند دوران المحاور زاوية θ تكون:

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,$$
$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

ومن ثم يكون:

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y'),\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y').$$

وبالتعويض فى المعادله المعطاه يكون:

$$\frac{8}{5}(2x'-y')^2+\frac{4}{5}(2x'-y')(x'+2y')+\frac{5}{5}(x'+2y')^2=36.$$

$$\therefore \frac{8}{5}\left(4x'^2 - 4x'y' + y'^2\right) + \frac{4}{5}\left(2x'^2 + 3x'y' - 2y'^2\right) + (x'^2 + 4x'y' + 4y'^2) = 36.$$

$$\therefore 9x'^2 + 4y'^2 = 36.$$

$$\therefore \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1.$$

وإذاً معادلة القطع تصبح على الصورة القياسية $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

ومن ثم يكون محور القطع الأكبر منطبق على محور الصادات ومحوره الأصغر منطبق على محور السينات ومركز القطع هو نقطة الأصل ويكون:

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, b^2 = 4 \Rightarrow b = 2, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}.$$

وإذاً بؤرتا القطع يكونا $(0,\sqrt{5}), (0,-\sqrt{5})$ وطول محوريه $2a = 6, 2b = 4$.

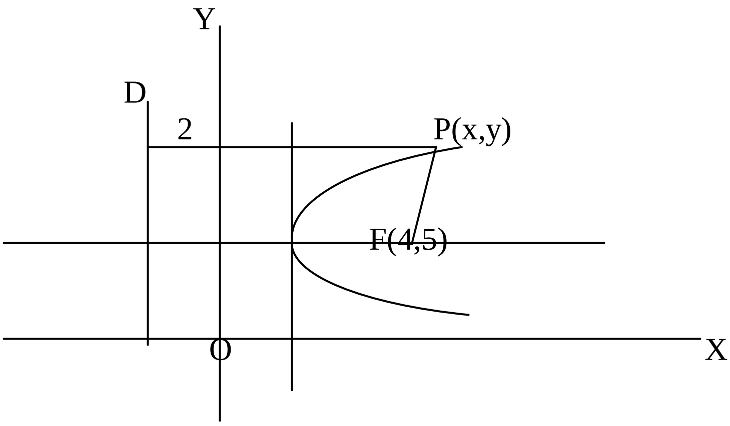
ونهايتا محوره الأكبر النقطتان $(0,3), (0,-3)$.

ونهايتا محوره الأصغر النقطتان $(2,0), (-2,0)$.

أمثلة متنوعة:

1- أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته النقطة $(4,5)$ ودليله المستقيم $x=-2$

الحل: القطع يكون كما بالرسم:



ولتكن $P(x,y)$ نقطة واقعة على القطع ، ولتكن البؤرة $F(4,5)$ ،

وليكن D هو الدليل.

فمن تعريف القطع المكافئ يكون:

$$\overline{PF}=\overline{PD}\Rightarrow\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=x+2.$$
$$\Rightarrow (x-4)^2+(y-5)^2=(x+2)^2.$$
$$\Rightarrow x^2-8x+16+y^2-10y+25=x^2+4x+4.$$
$$\Rightarrow y^2-10y-12x+37=0.$$

وهذه معادلة القطع المطلوبة.

2 – ضع كلاً من المعادلتين الآتيتين في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ ثم استنتج الصفات الهندسية لهذا القطع:

$(i)\ 2x-3y^2+y+5=0.$

$(ii)\ y=2x^2+4x+3.$

<u>الحل:</u>

$$(i)\ 2x-3y^2+y+5=0 \Rightarrow 2x+5=3(y^2-\frac{1}{3}y)$$

$$\Rightarrow 2x+5=3(y-\frac{1}{6})^2-3(\frac{1}{6})^2$$

$$2x+5=3(y-\frac{1}{6})^2-3(\frac{1}{6})^2 \Rightarrow 2x+\frac{61}{12}=3(y-\frac{1}{6})^2$$

$$\Rightarrow (y-\frac{1}{6})^2=\frac{2}{3}(x+\frac{61}{24}).$$

وإذاً المعادلة المعطاه تكون على الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الأفقي:

$(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$.

$\therefore 4a=\frac{2}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{6}.$

وإذاً محور القطع يوازي محور OX وفتحته تكون ناحية اليمين .

ورأس القطع تكون $(\alpha,\beta)=(-\frac{61}{24},\frac{1}{6})$.

وبؤرة القطع تكون $(a+\alpha,\beta)=(\frac{1}{6}-\frac{61}{24},\frac{1}{6})=(-\frac{57}{24},\frac{1}{6})$.

ومعادلة دليله تكون $x=-a+\alpha=-\frac{1}{6},-\frac{61}{24}=-\frac{65}{24}$.

ومعادلة محوره تكون $y=\beta=\frac{1}{6}$.

$$(ii)\ y = 2x^2 + 4x + 3 \Rightarrow y - 3 = 2x^2 + 4x$$
$$\Rightarrow y - 3 = 2(x+1)^2 - 2$$
$$\Rightarrow y - 1 = 2(x+1)^2$$
$$\Rightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{2}(y-1).$$

وإذاً المعادلة المعطاه تكون على الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الرأسي:

$$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta).$$

$$\therefore 4a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{8}.$$

وإذاً محور القطع يوازي محور OY وفتحته تكون لأعلى .

ورأس القطع تكون $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$.

وبؤرته النقطة $(\alpha, a+\beta) = (-1, \frac{9}{8})$ ودليله المستقيم $y = -a + \beta = \frac{7}{8}$.

ومعادلة محوره تكون $x = \alpha = -1$.

3 – أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(3,4)$ ودليله المستقيم $x+y-2=0$ ثم أوجد إحداثيات رأسه وطول وتره البؤري العمودي.

الحل: بفرض أن $P(x,y)$ نقطة على القطع

فمن تعريف القطع المكافئ يكون بُعد النقطة P عن البؤرة يساوي بُعدها عن الدليل.

$$\therefore (x-3)^2+(y-4)^2=\left(\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

$$\therefore x^2-6x+9+y^2-8y+16=(\frac{x^2+2xy+y^2-4x-4y+4}{2}).$$

$$\therefore x^2-2xy+y^2-8x-12y+46=0.$$

وهذه هي معادلة القطع المطلوبة.

وحيث إن ميل الدليل يساوي -1 ومحور التماثل للقطع عمودي على الدليل

فيكون ميل محور القطع يساوي 1 وهو يمر بالبؤرة فتكون معادلته هي:

$$\frac{y-4}{x-3}=1 \Rightarrow x-y+1=0.$$

ونقطة تقاطع محور القطع مع الدليل نحصل عليها بحل معادلتيهما معاً فتكون $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

وحيث إن رأس القطع المكافئ تكون في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل

وبفرض أن إحداثيات الرأس هي (x_1,y_1) فيكون:

$$x_1=\frac{3+\frac{1}{2}}{2}=\frac{7}{4}\ ,\ y_1=\frac{4+\frac{3}{2}}{2}=\frac{11}{4}.$$

وإذاً رأس القطع هي النقطة $\left(\frac{7}{4},\frac{11}{4}\right)$.

وطول الوتر البؤري العمودي يساوي ضِعف المسافة بين البؤرة والدليل

ومن ثم طول الوتر البؤري العمودي للقطع يكون:

$$2\sqrt{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(4-\frac{3}{2}\right)^2}=2\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)+\left(\frac{25}{4}\right)}=2\sqrt{\left(\frac{50}{4}\right)}=5\sqrt{2}.$$

4– أوجد معادلة القطع الناقص الذي إختلافه المركزي $\frac{2}{3}$

وأحد دليليه المستقيم $x=9$ وبؤرته المرافقة لهذا الدليل النقطة $(4,0)$

ثم أوجد مساحته ومعادلة كلاً من المماس والعمودي عند النقطة $(6,5)$.

<u>الحل</u>:

لتكن $P(x,y)$ نقطة واقعة على القطع ، ولتكن البؤرة $F(4,0)$ ،

وليكن D الدليل $x=9$ والاختلاف المركزي $e=\frac{2}{3}$

فمن تعريف القطع الناقص يكون:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PD}}=e\Rightarrow\overline{PF}^2=e^2\,\overline{PD}^2$$

$$\Rightarrow (x-4)^2+(y-0)^2=\frac{4}{9}(\frac{x-9}{\sqrt{1}})^2.$$

$$\Rightarrow x^2-8x+16+y^2=\frac{4}{9}(x-18x+81).$$

$$\Rightarrow 5x^2+9y^2=180.$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$$

وهذه هي معادلة القطع المطلوبة.

ومساحة القطع الناقص تساوي $\pi ab=6\pi\sqrt{20}=12\pi\sqrt{5}$.

ومعادلة المماس للقطع عند النقطة $(6,5)$ تكون $\frac{6x}{36}+\frac{5y}{20}=1$

أي تكون $4x+6y-24=0$

ومعادلة العمودي عند نفس النقطة تكون $\frac{x-6}{(\frac{6}{36})}=\frac{y-5}{(\frac{5}{20})}$

أي تكون $3x-2y-8=0$.

5- أوجد مركز القطع الناقص $4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$ وأطوال محوريه الأكبر والأصغر وطول وتره البؤري العمودي وقيمة اختلافه المركزي.

<u>الحل:</u>

نضع المعادلة على الصورة القياسية كما يلي:

$$4x^2+9y^2-16x+18y-11=0 \Rightarrow 4(x^2-4x)+9(y^2+2y)^2-11=0$$

$$\Rightarrow 4(x-2)^2-16+9(y+1)^2-9-11=0.$$

$$\Rightarrow 4(x-2)^2+9(y+1)^2=36.$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1.$$

وهذه المعادلة تناظر الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

وعلى ذلك تكون صفات القطع كما يلي:

وإذاً مركز القطع يكون $(\alpha,\beta)=(2,-1)$ والمحور الأكبر للقطع يوازي محور السينات ،

$$a^2=9 \Rightarrow a=3\ ,\ b^2=4 \Rightarrow b=2\ ,\ c^2=a^2-b^2=9-4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}.$$

وطول محوره الأكبر يساوي $2a=6$

وطول محوره الأصغر يساوي $2b=4$

وطول وتره البؤري العمودي يساوي $\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{3}$

والاختلاف المركزي له $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

6– بؤرتا قطع مخروطي اختلافه المركزي $\frac{12}{13}$ هما $(0,\pm 12)$ أوجد معادلته.

<u>الحل:</u>

حيث إن $\mathrm{e} = \frac{12}{13} < 1$ إذاً القطع هو قطع ناقص.

وواضح أن بؤرتا القطع $(0,\pm 12) = (0,\pm c)$ تقعان على محور الصادات ،

ولذلك يكون المحور الأكبر للقطع منطبقاً على محور الصادات ويكون:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12}{13} \Rightarrow \frac{12}{a} = \frac{12}{13} \Rightarrow a = 13 \ ,$$
$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = (13)^2 - (12)^2 = 25$$
$$\Rightarrow b = 5.$$

وإذاً معادلة القطع الناقص تكون $\frac{y^2}{169} + \frac{x^2}{25} = 1$.

7- أوجد معادلة المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$

وعمودي على المستقيم $x-y+5=0$.

<u>الحل:</u>

معادلة المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ عند النقطة (x_1,y_1) هي:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

وحيث إن المماس عمودي على المستقيم $x-y+5=0$ فيكون حاصل ضرب ميلهما يساوي -1 وإذاً يكون:

$$[\frac{(\frac{-x_1}{6})}{(\frac{y_1}{3})}][\frac{-1}{-1}]=-1\Rightarrow x_1=2y_1. \qquad (1)$$

وحيث إن نقطة التماس (x_1,y_1) تقع على القطع فتحقق معادلته وإذاً يكون:

$$\frac{{x_1}^2}{6}+\frac{{y_1}^2}{3}=1\Rightarrow 3{x_1}^2+6{y_1}^2=18. \qquad (2)$$

وبحل المعادلتين $(1),(2)$ نحصل على $x_1=2,\ y_1=1$ وإذاً نقطة التماس تكون $(2,1)$

ومعادلة المماس المطلوبة تكون $\frac{2x}{6}+\frac{y}{3}=1$ أي تكون $x+y-3=0$.

8– بيّن أن المعادلة $x^2-4y^2+2x+8y-7=0$ تمثل قطع زائد ثم اذكر صفاته.

الحل:

نضع المعادلة على الصورة القياسية كما يلي:

$$\begin{aligned} x^2-4y^2+2x+8y-7=0 &\Rightarrow (x^2+2x)-4(y^2-2y)-7=0 \\ &\Rightarrow (x+1)^2-1-4(y-1)^2+4-7=0. \\ &\Rightarrow (x+1)^2-4(y-1)^2=4. \\ &\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{1}=1. \end{aligned}$$

وهذه المعادلة تناظر الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1.$$

وعلى ذلك تكون صفات القطع كما يلي:

مركز القطع $(\alpha,\beta)=(-1,1)$ والمحور القاطع للقطع يوازي محور السينات ،

والمحور المرافق للقطع يوازي محور الصادات.

$$a^2=4\Rightarrow a=2\ ,\ b^2=1\Rightarrow b=1\ ,\ c^2=a^2+b^2=4+1=5\Rightarrow c=\sqrt{5}.$$

وبؤرتيه $(c+\alpha,\beta)=(-1+\sqrt{5},1),\ (-c+\alpha,\beta)=(-1-\sqrt{5},1)$.

ورأسيه $(a+\alpha,\beta)=(1,1),\ (-a+\alpha,\beta)=(-3,1)$.

وخطيه التقاربيين $y+\beta=\pm\frac{b}{a}(x+\alpha)$ أي يكونا $y+1=\pm\frac{1}{2}(x-1)$.

ومعادلة محوره القاطع تكون $y=\beta=1$ ومعادلة محوره المرافق تكون $x=\alpha=-1$.

9– اذكر صفات القطع المخروطي المُمثل بالمعادلة:

$9x^2-25y^2-18x-100y=316$.

<u>الحل</u>:

نضع المعادلة على الصورة القياسية كما يلي:

$$9x^2-25y^2-18x-100y=316 \Rightarrow 9(x^2-2x)-25(y^2+4y)=316$$
$$\Rightarrow 9(x-1)^2-9-25(y+2)^2+100=316.$$
$$\Rightarrow 9(x-1)^2-25(y+2)^2=225.$$
$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y+2)^2}{9}=1.$$

وهذه المعادلة تناظر الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

وعلى ذلك تكون صفات القطع كما يلي:

مركز القطع $(\alpha,\beta)=(1,-2)$ والمحور القاطع للقطع يوازي محور السينات ،

والمحور المرافق للقطع يوازي محور الصادات.

$a^2=25 \Rightarrow a=5$, $b^2=9 \Rightarrow b=3,\ c^2=a^2+b^2=25+9=34 \Rightarrow c=\sqrt{34}.$

وبؤرتيه $(c+\alpha,\beta)=(1+\sqrt{34},-2),\ (-c+\alpha,\beta)=(1-\sqrt{34},-2)$.

ورأسيه $(a+\alpha,\beta)=(6,-2),\ (-a+\alpha,\beta)=(-4,-2)$.

وخطيه التقاربيين $y+\beta=\pm\frac{b}{a}(x+\alpha)$ أي يكونا $y-2=\pm\frac{3}{5}(x+1)$.

ومعادلة محوره القاطع تكون $y=\beta=-2$ ومعادلة محوره المرافق تكون $x=\alpha=1$.

10- أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتى القطع الناقص $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

وبؤرتاه هما رأسى القطع الناقص الواقعتين على محوره الأكبر.

<u>الحل</u>:

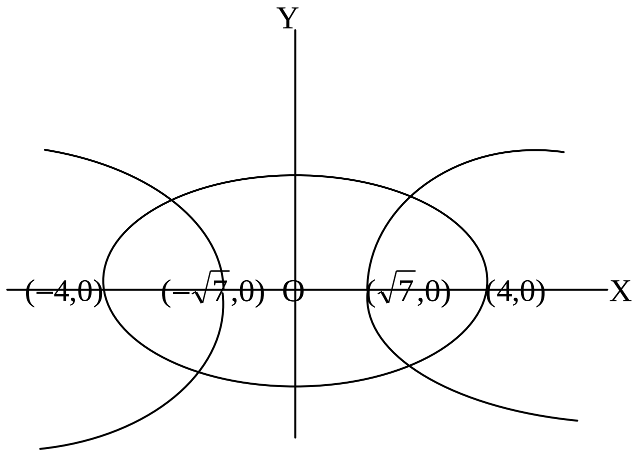
من صفات القطع الناقص المُعطى يكون:

$a^2=16 \Rightarrow a=4\ ,\ b^2=9 \Rightarrow b=3,\ c^2=a^2-b^2=16-9=7 \Rightarrow c=\sqrt{7}.$

وإذاً بؤرتى القطع الناقص هما $(\pm c,0)=(\pm\sqrt{7},0)$ ويكونا هما رأسى القطع الزائد المطلوب ، ونهايتى المحور الأكبر للقطع الناقص المُعطى هما $(\pm a,0)=(\pm 4,0)$

ويكونا هما بؤرتى القطع الزائد المطلوب.

كما بالشكل:



وإذاً بالنسبة للقطع الزائد المطلوب يكون:

$a=\sqrt{7}\ ,\ c=4,\ c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=16-7=9 \Rightarrow b=3.$

وعلى ذلك معادلة القطع الزائد المطلوبة تكون $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$.

▪ تمارين:

1– أوجد إحداثيات الرأس والبؤرة وطول الوتر البؤري العمودي للقطع المكافئ:
$x^2 - 4x + 8y + 12 = 0.$

2– أوجد معادلة القطع الناقص الذى مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه النقطة $(0,2)$ وطول محوره الأكبر يساوي 10 وحدات.

3– أوجد معادلة القطع الناقص الذي إختلافه المركزي هو $\frac{1}{3}$ وأحد دليليه المستقيم $x + y + 1 = 0$ وبؤرته المرافقة لهذا الدليل هي نقطة الأصل .

4– أوجد معادلة المماس للقطع الناقص $4x^2 + 9y^2 = 144$ وعمودي على المستقيم $x + y = 1$.

5– أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق بين بُعديها عن النقطتين $(-6,-4),(2,-4)$ يساوي 6 .

6– أوجد معادلة القطع الزائد الذي إختلافه المركزي هو 3 ومركزه نقطة الأصل وبؤرتيه تقعان على المحور السيني ويمر بالنقطة $(2,4)$.

7– حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية ثم اذكر صفاته:

$(i)\ y^2 + 6y + 2x + 5 = 0.$

$(ii)\ 25x^2 + 9y^2 - 100x - 54y - 44 = 0.$

$(iii)\ x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0.$

8– بدوران محاور الإحداثيات زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ تحقق من أن الصورة الجديدة للمعادلة :
$x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 3y - 2 = 0$
تمثل قطع مكافئ ثم اذكر صفاته.

==