بسم الله الرحمن الرحيم

محاضرات
في
الرياضيات الهندسية(2)

إعداد

د/ عمرو محمد الراوى

قسم الرياضيات – كلية العلوم بقنا

جامعة جنوب الوادي

نظرية المعادلات الجبرية

القسمة التركيبية لهورنر

هي طريقة تستخدم بدلا من عملية القسمة المطولة.

أولا: قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x-h)$:

عند قسمة كثيرة الحدود

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

من درجة n علي $x - h$ فيكون الناتج

$$f(x) = (x-h)q(x) + R,$$

خارج القسمة q(x) من الدرجة $n-1$ أي أن

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1},$$

أما باقي القسمة فهو مقدار ثابت خالي من x ومن ثم:

$$f(x) = (x-h)q(x) + R,$$

أي أن:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = (x-h)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}) + R,$$

وبمقارنة معاملات قوى x في الطرفين نحصل علي :

معامل x^n يكون $b_{n-1} = a_n$

معامل x^{n-1} يكون $b_{n-2} = h\,b_{n-1} + a_{n-1}$

$$\vdots$$

معامل x يكون $b_{n-2} = h\,b_1 + a_1$

الحد الخالي من x يكون $R = h\,b_0 + a_0$

وعلي ذلك يمكن الحصول علي خارج القسمة $q(x)$ والباقي $R(x)$ بالطريقة الاتية:

$$\begin{array}{c|ccccc} h & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & h\,b_{n-1} & \cdots & hb_1 & hb_0 \\ \hline & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & R \end{array}$$

<u>وتتلخص هذه الطريقة في الاتي:</u>

- نكتب في الصف الأول معاملات كثيرة الحدود $f(x)$ حسب قوى x التنازلية مع كتابة صفر في حالة قوى x الغير موجودة ونكتب h في أقصي اليسار.
- نكتب معامل x^n في أول الصف الثالث.
- نضرب معامل x^n في h ويكتب الناتج في الصف الثانى أسفل معامل x^{n-1}.
- نجمع معامل x^{n-1} مع القيمة التى أسفلة ونكتب ناتج الجمع الثالث أسفل معامل x^{n-1}.
- نضرب ناتج الجمع في h حتي نصل الي الحد المطلق a_0 ونجمع المقدار أسفلة فيكون هذا
- الناتج هو الباقى R.

<u>مــــثال :</u>

أوجد باقي وخارج قسمة كثيرة الحدود $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 4$ علي $x - 2$.

<u>الـــــحل:</u>

2	1	0	-3	4	0	-4
		2	4	2	12	24
	1	2	1	6	12	20

خارج القسمة $x^4 + 2x^3 + x^2 + 6x + 12$ والباقي 20.

ثانيا: قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ علي $(ax+b)$:

في هذه الحالة نحصل علي

$$f(x) = (ax+b)q(x) + R$$

ولاستخدم طريقة هورنر نضع $f(x)$ علي احدى الصورتين الاتيتين:

$$\frac{1}{a}f(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right)q(x) + \frac{R}{a} \quad \to (i)$$

$$f(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right)aq(x) + R \quad \to (ii)$$

- في الحالة (i) نقسم كثيرة الحدود $\frac{1}{a}f(x)$ علي $\left(x+\frac{b}{a}\right)$ أي أن نقسم أولا معاملات $f(x)$ علي a ونكتب المعاملات الجديده في الصف الأول وفي أقصي اليسار نضع $-\frac{b}{a}$

ويكون خارج القسمة الذى نحصل عليه هو $q(x)$ ولكن الباقي الذى نحصل عليه نضربه في a حتي نحصل علي الباقي المطلوب.

- في الحالة (ii) نكتب معاملات $f(x)$ في الصف الأول وفي أقصي اليسار نضع $-\frac{b}{a}$ وخارج القسمة الذى نحصل عليه يجب أن نقسمه علي a لنحصل علي خارج القسمة وباقي القسمة الذى نحصل عليه هو الباقي المطلوب.

مـــــثال :

أوجد باقي وخارج قسمة كثيرة الحدود $2x^3 + 4x^2 - 8$ علي $2x + 3$.

الـــــحل:

بالطريقة (i):

$\frac{-3}{2}$	1	2	0	-4
		$\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{9}{8}$
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-23}{8}$

ويكون خارج القسمة هو :

$$q(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

والباقي :

$$R = 2.\frac{-23}{8} = \frac{-23}{4}$$

بالطريقة (ii):

$\frac{-3}{2}$	2	4	0	-8
		-3	$\frac{-3}{2}$	$\frac{9}{4}$
	2	1	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-23}{4}$

ويكون خارج القسمة هو:

$$q(x) = \frac{1}{2}(2x^2 + x - \frac{3}{2})$$

والباقي:

$$R = \frac{-23}{4}$$

مـــــثال :

أوجد باقي وخارج قسمة كثيرة الحدود $2x^5 + 4x^2 - 8$ علي $2x - 3$.

الـــــحل:

بالطريقة (i):

1	0	0	2	0	-4
	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{129}{16}$	$\frac{387}{32}$
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{43}{8}$	$\frac{129}{16}$	$\frac{259}{32}$

ويكون خارج القسمة هو:

$$q(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{43}{8}x + \frac{129}{16}$$

والباقي :

$$R = 2.\frac{259}{32} = \frac{259}{16}$$

بالطريقة (ii):

$\frac{3}{2}$	2	0	0	4	0	-8
		3	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{129}{8}$	$\frac{387}{16}$
	2	3	$\frac{9}{2}$	$\frac{43}{4}$	$\frac{129}{8}$	$\frac{259}{16}$

ويكون خارج القسمة هو:

$$q(x) = \frac{1}{2}(2x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{43}{4}x + \frac{129}{8})$$

والباقي :

$$R = \frac{259}{16}$$

ثالثا: قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ علي $(x-a)(x-b)$:

سوف نجرى قسمة $f(x)$ علي $(x-a)$ فيكون خارج القسمة هو $q_1(x)$ والباقي R_1 أي أن

$$f(x) = (x-a)q_1(x) + R_1$$

وعند قسمة خارج القسمة $q_1(x)$ علي $(x-b)$ فيكون خارج القسمة هو $q_2(x)$ والباقي R_2 وبالتالي فان

$$f(x) = (x-a)(x-b)q_2(x) + (x-a)R_2 + R_1$$

وعلي ذلك عند قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ علي مقدار من الدرجة الثانية $(x-a)\ (x-b)$ فإن خارج القسمة هو $q_2(x)$ والباقي هو مقدار من الدرجة الأولي $R = (x-a)R_2 + R_1$

مـــثال:

أوجد باقي وخارج قسمة كثيرة الحدود $2x^5 + 4x^2 - 8$ علي $(x-3)(x+1)$.

الــــحل:

بإجراء القسمة التركيبية علي $(x+1)$ ثم $(x-3)$ كالتالي:

-1	2	0	0	4	0	-8
		-2	2	-2	-2	2
3	2	-2	2	2	-2	-6
		6	12	42	132	
	2	4	14	44	*130*	

ويكون خارج القسمة هو $q_2(x) = 2x^3 + 4x^2 + 14x + 44$.

والباقي $R = (x+1)130 - 6 = 130x + 124$.

مـــــثال :

أوجد $f(-1)$ إذا كانت $f(x) = 2x^5 + 4x^2 - 8$.

الـــــحل:

سوف نستخدم نظرية الباقي فعند قسمة $f(x)$ علي $(x+1)$ فان الباقي يكون

$$R = f(-1)$$

وبالتالي فان $f(-1) = -6$. "انظر المثال السابق"

رابعا : إيجاد قيمة $f(y+a)$ باستخدام طريقة هورنر:

نفرض أن $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ بوضع $x = y + a$

نجد أن:

$$\begin{aligned} f(y+a) &= a_0(y+a)^n + a_1(y+a)^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= c_0y^n + c_1y^{n-1} + \cdots + c_n \end{aligned}$$

وعند التعويض عن $y = x - a$ نحصل علي

$$f(x) = c_0(x-a)^n + c_1(x-a)^{n-1} + \cdots + c_n$$

$$= (x-a)[c_0(x-a)^{n-1} + c_1(x-a)^{n-2} + \cdots + c_{n-1}] + c_n$$

وبالتالي فان c_n هو باقي قسمة $f(x)$ علي $x - a$ وخارج القسمة هو:

$$c_0(x-a)^{n-1} + c_1(x-a)^{n-2} + \cdots + c_{n-1}$$

وأيضا c_{n-1} هو باقي قسمة القيمة السابقة علي $x - a$ نحصل علي بواقي القسمة.

مـــثال :

أوجد $f(x-3)$ اذا كانت $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$.

الـــحل:

وباجراء القسمة التركيبية نحصل علي

-3	1	-2	5	-1
		-3	15	-60
-3	1	-5	20	-61
		-3	24	
-3	1	-8	44	
		-3		
	1	-11		

$$f(x) = x^3 - 11x^2 + 44x - 61$$

مــــثال :

أوجد $f(x+3)$ اذا كانت $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 5x - 1$.

الـــــحل:

3	2	0	-2	-5	-1
		6	18	48	129
3	2	6	16	43	128
		6	36	156	
3	2	12	52	199	
		6	54		
3	2	18	106		
		6			
	2	24			

$$f(x+3) = 2x^4 + 24x^3 + 106x^2 + 199x + 128.$$

حذف الحد الثاني من المعادلة

نفرض أن لدينا المعادلة:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

لحذف الحد الثاني $a_{n-1}x^{n-1}$ نضع $x+h$ بدلا x فنحصل:

$$f(x+h) = a_n(x+h)^n + a_{n-1}(x+h)^{n-1} + \cdots + a_1(x+h) + a_0$$

ومنها معامل x^{n-1} في هذه المعادلة يكون

$$0 = na_n h + a_{n-1} \Rightarrow h = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$$

مـــثال :

احذف الحد الثاني من المعادلة $f(x) = 2x^4 - 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$.

الـــحل:

لحذف الحد الثاني

$$h = \frac{8}{8} = 1$$

1	2	-8	-2	-5	-1
		2	−6	−8	−13
1	2	−6	−8	−13	−14
		2	-4	-12	
1	2	-4	-12	-25	
		2	-2		
1	2	-2	-14		
		2			
	2	0			

وبالتالي تصبح المعادلة

$$f(x+1) = 2x^4 - 14x^2 - 25x - 14$$

بعض النظريات الأساسية في الجبر

نظرية:

المعادلة الجبرية $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ ***لها n من الجذور.***

البرهان: *متروك للطالب.*

نظرية:

إذا كانت $f(x)$ ***كثيرة حدود من الدرجة n ومعاملات كلها حقيقية فان الجذور المركبة تكون أزوج مترافق أى أن اذا كان*** $a + ib$ ***جذرا للمعادلة فإن*** $a - ib$ ***يكون جذرا لنفس المعادلة.***

البرهان:

نفرض أن $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ كثيرة حدود من الدرجة n ومعاملاتها أعداد حقيقية

بأخذ المرافق للمعادلة ينتج

$$\overline{a_n x^n} + \overline{a_{n-1} x^{n-1}} + \cdots + \overline{a_0} = 0$$

وبما أن المعاملات أعداد حقيقية فان مرافقها هي نفسها

$$a_n \overline{x^n} + a_{n-1} \overline{x^{n-1}} + \cdots + a_0 = 0$$

$$a_n (\bar{x})^n + a_{n-1} (\bar{x})^{n-1} + \cdots + a_0$$

اذن $\bar{x}$ تكون جذرا للمعادلة طالما x جذرا للمعادلة.

نتيجة:

أى معادلة جبرية من الدرجة الفردية لها جذر حقيقى واحد على الأقل.

البرهان:

يأتي الاثبات من النظرية السابقة حيث تتواجد الجذور المركبة مثني مثني.

مـــــثال :

أوجد جذور المعادلة $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 16x + 12 = 0$ اذا علمت أن $2i$ جذرا لها.

الـــــحل:

بما أن معاملات المعادلة المعطأه حقيقية أن $2i$ جذرا لها لذلك فان $-2i$ جذرا لها أيضا وبالتالي فإن

$$(x - 2i)(x + 2i) = x^2 + 4$$

عامل من عوامل $f(x)$ وبأجراء عملية القسمة المطولة نحصل علي باقي الجذور وهي

$$\pm 2i, 1,3$$

نظرية:

إذا كان $x = \propto$ جذرا للمعادلة $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ مكرر m من المرات فإن $x = \propto$ يكون جذرا للمعادلة $f'(x) = 0$ مكرر $m - 1$ من الممرات.

البرهان:

حيث أن $x=\propto$ جذرا للمعادلة $f(x)=0$ مكرر m من المرات فإن:

$$f(x)=(x-\propto)^m g(x)$$

حيث $n=m+\deg(g(x))$

$$f'(x)=m(x-\propto)^{m-1}g(x)+(x-\propto)^m g'(x)$$

$$=(x-\propto)^{m-1}[mg(x)+(x-\propto)g'(x)]$$

إذن $\propto$ جذرا للمعادلة $f'(x)=0$ مكرر $m-1$ من المرات.

مـــــثال:

إذا علمت للمعادلة $f(x)=\ x^4-3x^3-6x^2+28x-24=0$ جذرا مكررا ثلاث مرات فأوجد جميع جذور تلك المعادلة.

الـــــحل:

$$f'(x)=\ 4x^3-9x^2-12x+28$$

$$f''(x)=\ 12x^2-18x-12$$

وبما ان $f''(x)=0$

$$\therefore\ 12x^2-18x-12=0$$

$$\Rightarrow (2x+1)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\quad or\quad x=2$$

ونلاحظ $f(2) = 0$ وبالتالي 2 هو الجذر المكرر ثلاث مرات ولايجاد الجذر الرابع نقسم كثيرة الحدود علي $(x-2)^3$ باستخدام القسمة التركيبية نحصل علي:

2	1	-3	-6	28	-24
		2	-2	-16	24
2	1	-1	-8	12	0
		2	2	-12	
2	1	1	-6		0
		2	6		
	1	3		0	

خارج القسمة هو $x + 3$ ومن ثم فجور المعادلة هي

$$2, 2, 2, -3$$

العلاقة بين جذور المعادلة ومعاملاتها

بفرض أن جذور المعادلة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

هي $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ويمكن كتابة كثيرة الحدود في الصورة الاتية:

$$f(x) = a_n\left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}\right)$$

$$= a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

وبمقارنة معاملات قوي x من الطرفين نحصل علي:

- ✓ معامل x^n هو a_n.
- ✓ معامل x^{n-1} هو $\frac{a_{n-1}}{a_n} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

أي أن مجموع جذور المعادلة = ـ معامل x^{n-1} مقسوما علي معامل x^n.

- ✓ معامل x^{n-2} هو

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_2\alpha_n + \cdots$$

$$+ \alpha_{n-1}\alpha_n = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha_i \alpha_j$$

أي أن مجموع حاصل ضرب جذور المعادلة مثنى مثنى = معامل x^{n-2} مقسوما على معامل x^n.

✓ معامل x^{n-3} هو

$$\frac{a_{n-3}}{a_n}=\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n}\alpha_i\,\alpha_j\alpha_k$$

أي أن مجموع حاصل ضرب جذور المعادلة ثلاث ثلاث = معامل x^{n-3} مقسوما على معامل x^n.

و هكذا

✓ الحد المطلق هو

$$\frac{a_0}{a_n}=(-1)^n\prod_{i=1}^{n}\alpha_i$$

أي أن حاصل ضرب الجذور = $(-1)^n$ الحد المطلق مقسوما على معامل x^n.

مـــــثال:

أوجد جذور المعادلة $f(x) = x^4 - 2x^2 - 16x - 15 = 0$.

الـــــحل:

الجذور المحتملة هي عوامل الحد المطلق 15 وهي:

$$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$$

ثم نجرى القسمة التركيبية لكل جذر محتمل وفي حالة أن يكون الباقي مساويا للصفر يكون القاسم جذرا فعليا للمعادلة.

اذن باستخدام القسمة التركيبية على المعامل -1

-1	1	0	-2	-16	-15
		-1	1	1	15
	1	-1	-1	-15	0

$$f(x) = (x+1)(x^3 - x^2 - x - 15)$$

وباختيار 3 نجد أن:

3	1	-1	-1	-15
		3	6	15
	1	2	5	0

$$f(x) = (x+1)(x^3 - x^2 - x - 15)$$

$$f(x) = (x+1)(x-3)(x^2 + 2x + 5)$$

وبحل المعادلة التربيعية نكون قد حصلنا علي جذور المعادلة الأصلية وهي

$$-1, 3, -1 \pm 2i$$

مــــثال:

إذا علم أن جذرين المعادلة $f(x) = x^4 + 6x^3 + sx^2 + tx + 36 = 0$ حقيقيان ويساويان ضعف الجذرين الأخرين. أوجد الجذرين وقيمة كل من s, t .

الـــــحل:

نفرض أن الجذور هي $s, t, 2s, 2t$ وبما أن مجموع الجذور:

$$3s + 3t = -6 \Rightarrow s + t = -2 \longrightarrow (1)$$

حاصل ضرب الجذور

$$4s^2t^2 = (-1)^4(36) \Rightarrow st = \pm 3 \longrightarrow (2)$$

وبالتعويض من (1) و (2) مع الأخذ في الاعتبار أن الجذور حقيقية نجد أن الجذور هي

$$1, 2, -3, -6$$

وبالتالي

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x+3)(x+6)$$

$$= x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 36x + 36$$

ومنها $s = -7, t = -36$.

تحويل المعادلات

1- تكوين المعادلة التي جذورها هي جذور المعادلة الأصلية ولكن باشارة مخالفة:

نفرض أن لدينا معادلة $f(x) = 0$ وأن أحد جذورها هي x وعند وضع $y = -x$ في هذه المعادلة فتحصل $f(-y) = 0$ والمعادلة التي جذورها هي نفس جذور المعادلة الأصلية ولكن مخالفة في الاشارة.

مثال:

أوجد المعادلة التي جذورها تساوى جذور المعادلة

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

ولكن باشارة مخالفة.

الحل:

المعادلة المطلوبة

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - (-x) + 1$$

$$= -x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

2- <u>تكوين المعادلة التي جذورها هي مقلوب جذور المعادلة الأصلية:</u>

نفرض أن لدينا معادلة $f(x) = 0$ وأن أحد جذورها هي $r, r \neq 0$ وعند وضع $y = \frac{1}{x}$ في هذه المعادلة فنحصل $f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$ والمعادلة التي جذورها مقلوب جذور المعادلة الأصلية.

<u>مثال:</u>

أوجد المعادلة التي جذورها هي مقلوب جذور المعادلة

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

الحل:

المعادلة المطلوبة

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right) + 1$$

$$= x^3 - x^2 + x + 1 = 0.$$

3- <u>تكوين المعادلة التي جذورها هي m من المرات من جذور المعادلة الأصلية:</u>

بفرض أن α هي أحد جذور المعادلة $f(x) = 0$ وبوضع $y = mx \Rightarrow x = \frac{y}{m}$ نحصل علي $f\left(\frac{y}{m}\right) = 0$ وهي المعادلة التي جذورها هي m من المرات من جذور المعادلة الأصلية.

مثال:

أوجد المعادلة التي جذورها هي عشر أضعاف جذور المعادلة

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

الحل:

المعادلة المطلوبة

$$f\left(\frac{x}{10}\right) = \left(\frac{x}{10}\right)^3 + \left(\frac{x}{10}\right)^2 - \left(\frac{x}{10}\right) + 1$$

$$= x^3 + 10x^2 - 100x + 1000 = 0.$$

4- تكوين المعادلة التي جذورها هي مربعات جذور المعادلة الأصلية:

بفرض أن α هي أحد جذور المعادلة $f(x) = 0$ وبوضع $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ نحصل على $f(\sqrt{y}) = 0$ وهي المعادلة التي جذورها هي مربعات جذور المعادلة الأصلية.

مثال:

أوجد المعادلة التي جذورها هي مربع جذور المعادلة

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

الحل:

المعادلة المطلوبة

$$f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x}) + 1$$

$$= x^{\frac{3}{2}} + x^2 - \sqrt{x} + 1 = 0.$$

5- تكوين المعادلة التي جذورها تقل عن جذور المعادلة الأصلية بمقدار ثابت m:

بفرض أن α هي أحد جذور المعادلة $f(x) = 0$ وبوضع $y = x - m \Rightarrow x = y + m$ نحصل علي $f(y + m) = 0$ وهي المعادلة التي جذورها تقل عن جذور المعادلة الأصلية بمقدار ثابت m.

مثال:

أوجد المعادلة التي جذورها تقل بمقدار 1 عن جذور المعادلة

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

الحل:

المعادلة المطلوبة

$$f(x + 1) = (x + 1)^3 + (x + 1)^2 - (x + 1) + 1$$

$$= x^3 + 4x^2 + 4x + 2 = 0.$$

ملحوظة:

يمكن استخدام طريقة هورنر للحصول علي قيمة $f(y + m)$.

قاعدة الأشارات

التغير في الأشارة هو تغير إشارات معاملات كثيرة الحدود من موجب إلى سالب أو العكس.

عدد الجذور الموجبة للمعادلة الجبرية $f(x) = 0$ ذات المعاملات الصحيحة يكون إما مساويا لعدد تغيرات الإشارات في كثيرة الحدود $f(x)$ أو أقل من هذا العدد بعدد صحيح زوجي موجب.

مثال: إبحث الجذور الموجبة للمعادلة الجبرية $x^3 - 4x^2 - 6x + 9 = 0$

الحل: التغير في الأشارات هي +--+ وعددهم 3 وبالتالي عدد الجذور إما 3 أو 1.

عدد الجذور السالبة للمعادلة الجبرية $f(x) = 0$ ذات المعاملات الصحيحة يكون إما مساويا لعدد تغيرات الإشارات في كثيرة الحدود $f(-x)$ أو أقل من هذا العدد بعدد صحيح زوجي موجب.

مثال: إبحث الجذور السالبه للمعادلة الجبرية $x^3 - 4x^2 - 6x + 9 = 0$

الحل: بما أن $f(-x) = -x^3 - 4x^2 + 6x + 9 =$

التغير في الأشارات هي ++-- وعددهم 1 وبالتالي عدد الجذور إما 1 أو لايوجد.

تمارين (5-1)

1- أوجد خارج وباقي قسمة كل مما يأتي:

I. $f(x) = x^5 + x^2 - x + 1 \qquad \div x + 4.$

II. $f(x) = 3x^7 + 12x^2 - x + 1 \qquad \div x + 2.$

III. $f(x) = 3x^5 + x^3 - x + 1 \qquad \div 3x + 2.$

IV. $f(x) = x^5 - 4x^3 + 3x^2 - x + 1 \qquad \div 3x - 2.$

V. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 16x + 13 \quad \div x^2 - 3x - 4.$

VI. $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 15x^2 + 7 \qquad \div x^2 - x - 2.$

ثم أوجد قيمة $f(4)$ و $f(2)$ وكذلك احذف الحد الثاني من المعادلات السابقة وابحث الجذور الموجبة والسالبة.

2- حول المعادلات الاتيه ال أخرى يكون فيها معامل x^3 هو الوحدة ومعاملات باقي الحدود أعداد صحيحة:

i. $x^3 + 4x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{9} = 0.$

ii. $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{18} = 0.$

3- كون المعادلة التي جذورها تزيد بمقدار 4 عن جذور المعادلة :

$$x^3 - x^2 + 16x + 4 = 0.$$

4- كون المعادلة التي جذورها تنقص بمقدار 3 عن جذور المعادلة:

$$x^5 + x^3 - x^2 + 16x + 4 = 0.$$

5- كون المعادلة التي جذورها مقلوب جذور المعادلة:

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 7 = 0.$$

6- باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود

$$f(x) = x^3 + 5x - 3$$

علي العامل $x + 1$.

7- أوجد المعادلة التي جذورها 1و2(مكرر مرتين)و $1 + i$.

8- أوجد باقي جذور المعادلة

$$x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 19x + 10 = 0$$

اذا علمت أن أحد جذورها $1 + 2i$.

9- كون المعادلة ذات المعاملات الحقيقية والتي بعض جذورها $1,2,3 + \sqrt{2}$. هي بشرط أن تكون درجتها أقل مايمكن.

10- أوجد جذور المعادلة

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 18 = 0$$

اذا علمت أن مجموع جذرين من جذورها يساوى الصفر.

11- أوجد جذور المعادلة اذا علمت أن لها جذر مكرر ثلاث مرات

$$x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 28x - 24 = 0$$

12-أوجد الجذور الكسرية ثم باقي الجذور للمعادلة

$$3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

13-كون المعادلة التي جذورها تنقص بمقدار الوحدة عن جذور المعادلة

$$2x^3 - 15x^2 + 31x - 12 = 0$$

ثم استنتج جذور المعادلة الأصلية اذا علم أن الفرق بين جذرين من جذورها يساوى الوحدة.

نشكركم على حسن المتابعة...

د/ عمرو الراوى